Funktionentheorie

Dipl.-Ing. (FH)
Alexander Kiebler
E-Mail: alexander_kiebler@gmx.net
Tel.: 0170 4348549

—Lustige Lebensweisheit—
Mit Glaube wird alles möglich.
Mit Liebe wird alles einfach.
Mit Hoffnung wird alles gut.

Inhaltsverzeichnis

Holomorphie I

Rechnen mit komplexen Zahlen 1

1.1 Definition und Rechenregeln

Die komplexen Zahlen sind beim Lösen von Gleichungen entdeckt worden, deren Grad größer gleich zwei ist. Zum Beispiel hat die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ im Reellen keine Lösung. Dabei mußte eine Zahl definiert werden, welche Ausdrücke wie $\sqrt{-1}$ oder $-1 = z^2$ zulassen. Da es in $\mathbb{R}$ aus Symmetriegründen keine Zahl z gibt welche diese Bedinung erfüllt, wurde die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ eingeführt.

Definition: Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
Der Körper $\mathbb{R}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, ($\mathbb{C} := \mathbb{R}X\mathbb{R}$). Für $\mathbb{C}$ gelten die Folgenden Rechenregeln:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \tag{1}$$
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc) \tag{2}$$

Mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dabei sind $(1, j)$ eine Basis von $\mathbb{C}$ und bilden ein Karthesisches Koordinatensystem. Es gilt $j^2 = -1$.

So kann man eine komplexe Zahl als Vektor schreiben:

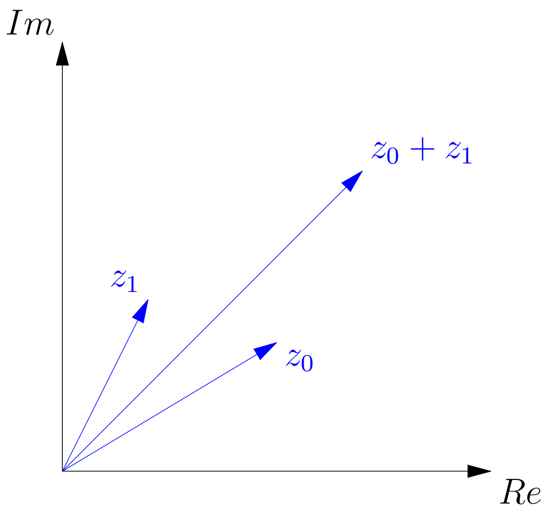
$$z = a + jb$$

Die Addition zweier komplexer Zahlen z_0 und z_1 ist äquivalent zur zweidimensionalen Vektoraddition:

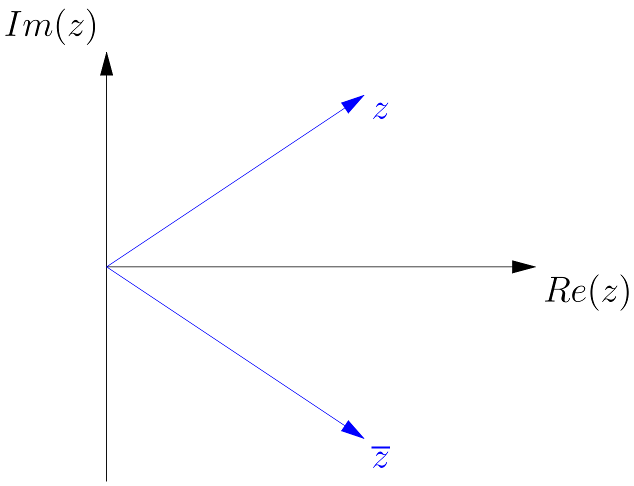
$$z_0 = a + jb \quad , z_1 = c + jd$$
$$z_0 + z_1 = (a + c) + j(b + d)$$

Das konjungiert Komplexe $\overline{z}$ einer komplexen Zahl z bekommt man durch Spiegelung an der reellen Achse

$$z = a + jb$$
$$\overline{z} = a + j(-b)$$



Addition zweier komplexer Zahlen



Das kunjungiert Komplexe $\overline{z}$ von z

Dabein sind Realteil Re und Imaginärteil Im einer komplexen Zahl z definiert als:

$$z = a + jb \qquad Re(z) = a \quad Im(z) = b$$

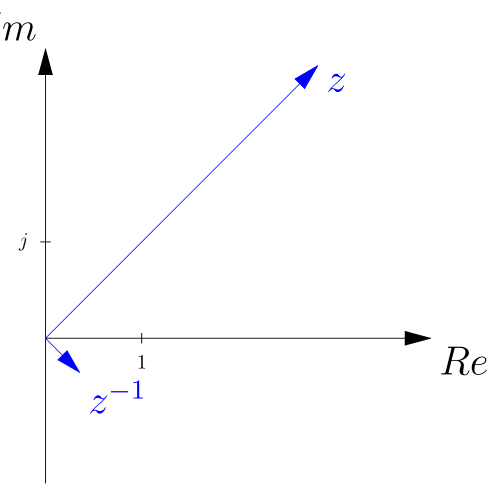
Wie man sieht haben komplexe Zeiger eine Länge (äquivalent zur euklidischen Norm in zweidimensionalen Raum). Somit ist der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl z:

$$|z| = +\sqrt{z\overline{z}} \qquad |z| \in \mathbb{R}_+$$

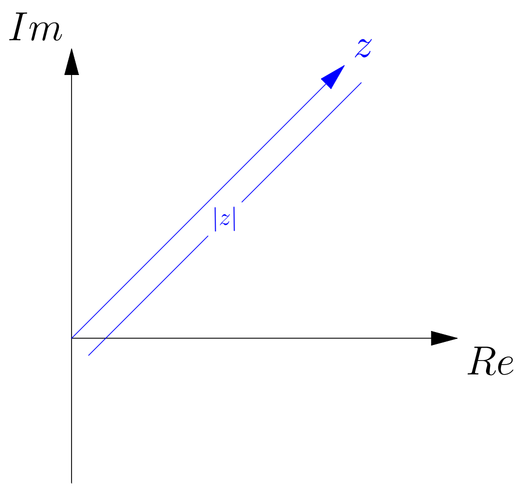
Es stellt sich nun die Frage, wie man das Inverse z^{-1} zu einer gegebenen Zahl z bildet. Hierfür eignet sich der folgende Ausdruck:

$$1 = z \cdot \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} \quad \Leftrightarrow \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Man erhält also das inverse Element zu z in dem man dessen konjungiert Komplexes bildet und die Länge mit dem Quadrat der Länge von z dividiert.



Inverses Element einer komplexen zahl z



Lnge $|z|$ von z

Als nächstes wird die Multiplikation genauer betrachtet. Sie ist zwar zu Anfang definiert worden, jedoch weit entfernt von einer guten Vorstellung was dort genau passiert. Die anschauliche Vorstellung zur Multiplikation zweier komplexer Zahlen erhält man durch das Betrachten folgender Ausdrücke:

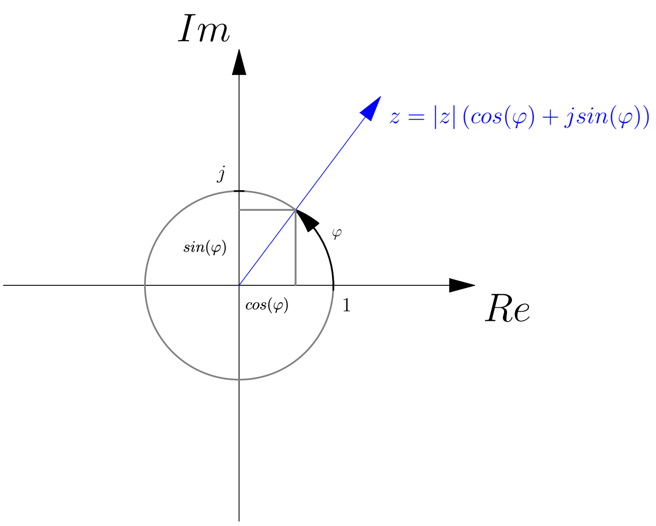
$$z = a + jb$$
$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} \quad , mit \quad \frac{z}{|z|} = x + jy = \frac{a+jb}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad ist:$$
$$x := \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , und \quad y := \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Dabei ist $\frac{z}{|z|}$ der normierte Vektor mit der Länge 1. Nachweis wobei Im senkrecht auf Re:

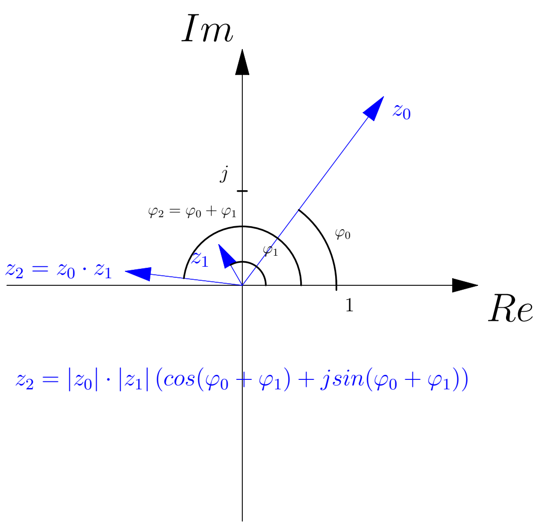
$$x^2 + y^2 = 1 = Re\left(\frac{z}{|z|}\right)^2 + Im\left(\frac{z}{|z|}\right)^2$$

Somit bildet der Zeiger $\frac{z}{|z|}$ mit dem Koordinatenursprung und der Projektion auf einer der beiden Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck (äquivalente Aussage zu Re steht senkrecht auf Im) mit der Länge 1.
Und somit befindet sich jede beliebige Zahl $\frac{z}{|z|}$ auf dem Einheitskreis.

$$x = cos(\varphi) \quad , und \quad y = sin(\varphi) \quad mit \quad \varphi \in [0 \cdots 2\pi[\quad somit$$
$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = |z|(x + jy) \quad also$$
$$z = |z|(cos(\varphi) + jsin(\varphi))$$



z als Kugelkoordinaten



Multiplikation zweier komplexer Zeiger z_0 und z_1

$$z_2 = z_0 \cdot z_1 = |z_0|\,(cos(\varphi_0) + jsin(\varphi_0)) \cdot |z_1|\,(cos(\varphi_1) + jsin(\varphi_1))$$
$$= |z_0| \cdot |z_1|\,(cos(\varphi_0)cos(\varphi_1) - sin(\varphi_0)sin(\varphi_1) + j\,(cos(\varphi_0)sine(\varphi_1) + sin(\varphi_0)sin(\varphi_1)))$$
$$= |z_0| \cdot |z_1|\,(cos(\varphi_0 + \varphi_1) + jsin(\varphi_0 + \varphi_1))$$

Definition: Komplexe Zahl in Kugelkoordinaten
Jede komplexe Zahl z kann als Drehstreckung des reellen Einheitsvektors $1 + j0$ geschrieben werden. Dabei wird um das Argument von z ($\arg(z)$) in positiver mathematischer Richtung gedreht und dann um den Betrag von z ($|z| = abs(z)$) gestreckt.

$$|z| = \text{Abs(z)} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \quad \varphi = \text{Arg(z)} = \tan^{-1}\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) \tag{3}$$

$$z = |z| \left(cos(\varphi) + jsin(\varphi)\right) \tag{4}$$

Definition: Multiplikation
Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, in dem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert.

$$z_2 = z_0 \cdot z_1 = |z_0| \cdot |z_1| \left(cos(\varphi_0 + \varphi_1) + jsin(\varphi_0 + \varphi_1)\right) \tag{5}$$

Die Multiplikation sowie die Rechenregeln für die trigonometrischen Funktionen lassen sich noch besser durch Potenzreihen beschreiben oder genauer mit der komplexen Exponentialfunktion aufgefasst als Drehzeiger. Dies hier ist also ein kleiner Vorgriff.

1.2 Die Konvergenz von Folgen und Reihen

Der Konvergenzbegriff von Folgen und Reihen ist die Grundlage für stetige Funktionen. In einem ersten Schritt wird eine Folge definiert.

Definition: Folge
Eine Folge ist eine geordnete Menge von Zahlen. Jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird eine Zahl zugeordnet.

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots \tag{6}$$

oder

$$\{z_k\} \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Dabei ist jedes z_n ein Glied der Zahlenfolge.

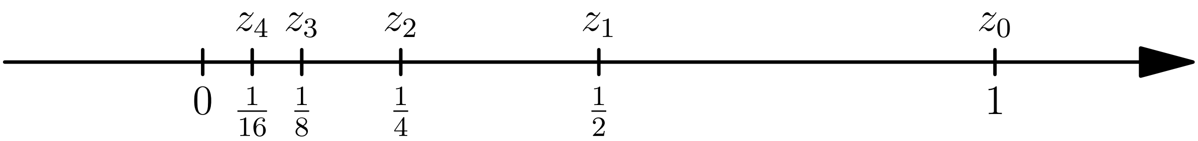
Oft ist es so, dass man in der Natur nur die Änderung eines Sachverhalts messen kann, und man fragt sich, wie sich der Sachverhalt weiterentwickeln wird unter einer bestimmten Randbedingung. Gegeben sei folgende Entwicklung. Es wird eine Größe z_0 gemessen. Nun stellt man fest dass sich z immer halbiert, zum beispiel über einem konstanten Zeitschrit,Ortsschritt,Farbschritt etc. gemessen.

Also $z_{n+1} = \frac{z_n}{2}$. Es gilt also:

$$\begin{aligned} z_0 &= \text{Gemessene Größe} \\ z_1 &= Z_0 \frac{1}{2} \\ z_2 &= Z_0 \frac{1}{2}\frac{1}{2} \\ z_3 &= Z_0 \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} \\ z_4 &= Z_0 \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} \\ z_n &= Z_0 \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Welchen Wert wir am Anfang für z_0 gemessen haben scheint nicht so wichtig zu sein, da wir die Folge berechnen können und anschließend mit der gemessenen Größe Z_0 multiplizieren können, ohne das Ergebnis zu verändern. Deshalb setzen wir $z_0 = 1$. Wir erhalten die Folge:

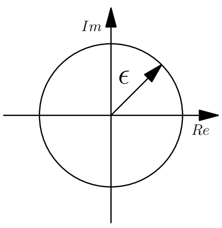
$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}_{>0}} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots \tag{8}$$



Schaut man sich die Folge 8 an so stellt man zum Beispiel fest, dass das n-te Element beliebig klein werden kann. Das heißt man kann zu jedem $\epsilon > 0$ immer ein N finden, sodass das dazugehörige N-te Glied kleiner ist als das $\epsilon \in \mathbb{R}_+$. Sind auch alle weiteren Glieder mit $n > N$ kleiner als ϵ so nennt man die Folge eine Nullfolge.

Definition: Nullfolge
Eine Zahlenfolge ist eine Nullfolge wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so dass

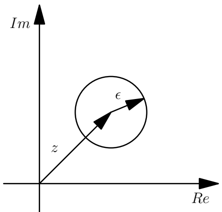
$$|z_n| < \epsilon \qquad \text{für alle} \qquad n \geq N \tag{9}$$



Wenn alle Glieder der Folge mit $n \geq N$ innerhalb des Kreises mit Radius $\epsilon > 0$ liegen, dann ist die Folge eine Nullfolge. Dabei kann ϵ beliebig klein gewählt werden muß aber größer Null sein. Unsere Beispielfolge 8 aus dem Reellen würde man im komplexen wohl über den Betrag einer komplexen Zahl definieren. Also $r_{n+1} = \frac{r_n}{2}$. Man erhält Kreise, deren Radius sich für jedes n halbiert. Eine solche Folge ist ein Beispiel für eine Nullfolge im Komplexen.

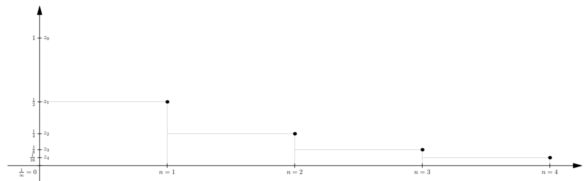
Definition: Grenzwert oder Konvergenz einer Folge gegen eine Zahl
Eine Folge konvergiert gegen eine komplexe Zahl z, falls die differenzenfolge $z_0 - z, z_1 - z, z_2 - z, \dots$ eine Nullfolge ist. Man schreibt:

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \qquad \text{oder auch} \qquad z_n \to z \quad \text{für} \quad n \to \infty \tag{10}$$



Eine Folge konvergiert gegen eine Zahl z wenn es zu jedem ϵ ein N gibt, so dass alle Differenzen von $z_n - z$ mit $n \geq N$ innerhalb des Kreises mit Radius ϵ um z liegen. Auch hier darf ϵ beliebig klein gewählt werden aber nicht null sein.

Wir stellen uns vor, die Folge 8 sei eine Wachstumsrate.



Wenn wir die einzelnen Werte der Folge z_n über n auftragen, so liegt ein Zusammenhang mit den uneigentlichen Integralen sehr nahe. Da wir jetzt aber noch keinen Integralbegriff haben, verschieben wir diese Ansicht auf später.

Das Wachstum halbiert sich also in jedem Schritt n. Um nun zu wissen, wie weit das wachstum für ein festes $n = N$ fortgeschritten ist, müssen wir die einzelnen Glieder der Folge aufsummieren. Wenn wir also von C_0 angefangen haben zu messen, dann erhalten wir folgende Entwicklung für fortlaufende n:

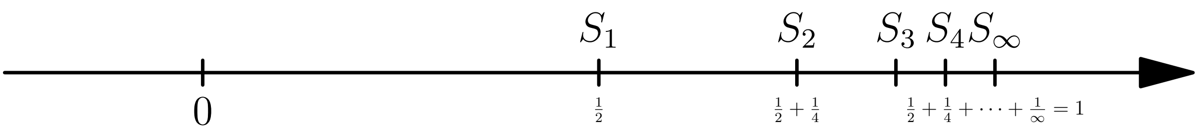
$$C_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \tag{11}$$

Somit entsteht eine neue Folge S_n, die Folge der Partialsummen in dem man $C_0 = 0$ setzt.

$$S_n := z_0 + z_1 + z_2 + \cdots + z_n \tag{12}$$

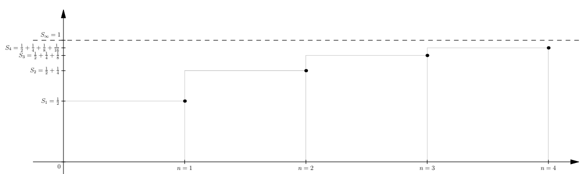
In unserem Beispiel ergibt sich also:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} \\ S_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \end{aligned}$$



Diese Folge S_n wird nun Reihe genannt, welche der Folge z_n zugeordnet ist. Also lautet die der Folge 8 zugeordnete Reihe:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$$



Auch hier schaut es so aus, als ließe sich ein Integralkriterium entwickeln. Man erkennt, dass es sich dann aber um nicht ganzzahlige n handeln muss, um die Werte zwischen zwei ganzzahligen n stetig fortzusetzen.

Rein intuitiv sieht man, dass die Reihe auf der einen Seite die Zahl 1 nie erreicht für endliche n, aber

ihr beliebig nahe kommt je grösser die Zahl n gewählt wird.
Die Reihe S_n kann natürlich wieder als Folge aufgefasst werden, wofür wir die **Konvergenz** bereits definiert haben. Konvergiert die Reihe so schreibt man:

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n \qquad S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \tag{13}$$

Konkret bedeutet das, dass die Reihe gegen die Zahl S konvergiert, wenn $S - S_n$ eine Nullfolge ist. Da hierfür die Zahl S endlich sein muß ist eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe gegeben durch:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \tag{14}$$

Wobei hier z_n die Folge ist, mit welcher man eine Reihe S_n gebildet hat.

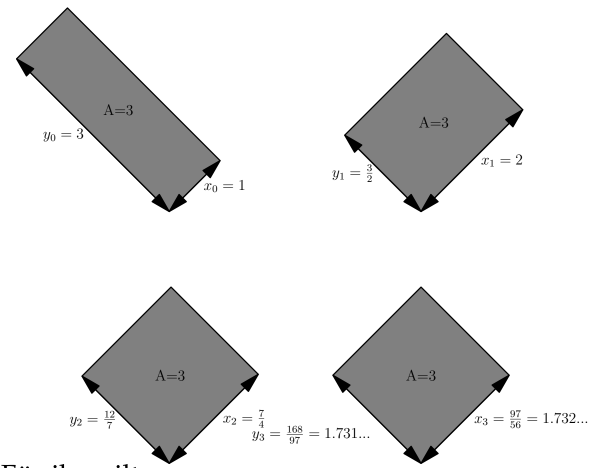
Definition: Notwendige Bedingung für die Konvergenz eine Reihe
Die Reihe S_n konvergiert nur dann, wenn ihre Folge z_n das Kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \tag{15}$$

erfüllt.

1.3 Wurzelfolgen

Eine der ältesten und grundlegensten Folgen der Mathematik ist die Wurzelfolge oder das babylonische Wurzelziehen. Die Folge läßt sich aus einer einfachen geometrischen überlegung herleiten.



Gegeben ist ein Rechteck mit den beiden Seitenlängen $x_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ und dem Flächeninhalt A. Wenn es uns nun gelingt, das Rechteck so zu verändern, dass aus dem Rechteck ein Quadrat wird ohne den Flächeninhalt des Rechtecks zu verändern, so erhalten wir:

$$x_0 = y_0 = \sqrt{A}$$

Um nun die beiden Ausgangsseitenlängen x_0, y_0 einander anzunähern wird einfach der Mittelwert der beiden Seitenlängen berechnet.

Für ihn gilt:

$$x_1 = \frac{x_0 + y_0}{2}$$
$$x_2 = \frac{x_1 + y_1}{2}$$
$$\dots$$
$$x_n = \frac{2x_n}{2} \qquad \text{mit} \quad x_n = y_n$$

Um den Flächeninhalt A nicht zu verändern gilt für y_1:

$$y_1 = \frac{A}{x_1}$$

Und somit:

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{A}{x_1}}{2}$$

Und wir erhalten die Wurzelfolge:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) \tag{16}$$

Genau mit der gleichen Vorgehensweise kann man auch die dritte Wurzel aus einer Zahl ziehen.

$$\begin{aligned} x_1 = y_1 &= \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} \\ x_2 = y_2 &= \frac{x_1 + y_1 + z_1}{3} \\ &\dots \\ x_n = y_n = \frac{3x_n}{3} &\qquad \text{mit} \quad x_n = y_n = z_n \end{aligned}$$

Um das Volumen A nicht zu verändern gilt für z_1:

$$z_1 = \frac{A}{x_1 * y_1} = \frac{A}{x_1^2}$$

Und wir erhalten die Wurzelfolge für $\sqrt[3]{A}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{A}{x_n^2}\right) \tag{17}$$

Wie man sieht kann man das auf die k-ten Wurzeln verallgemeinern:

$$x_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}}\right) \qquad \lim_{n\to\infty} x_n \to \sqrt[k]{A} \tag{18}$$

1.4 Harmonische Reihen

1.5 Konvergenz der geometrischen Reihe

Eine der wichtigsten Reihen der Mathematik ist die geometrische Reihe.

Definition: Konvergenz der geometrischen Reihe
Die geometrische Reihe konvergiert zu:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n \tag{19}$$

$$mit|z| < 1 \tag{20}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
(1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n)(1-z) &= (1-z)+(z-z^2)+(z^2-z^3)+...+(z^n-z^{n+1}) \\
(1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n)(1-z) &= 1-z^{n+1} \\
(1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n) &= \frac{1-z^{n+1}}{1-z}
\end{aligned}
$$

Nun wird die Bedingung $|z| < 1$ verwendet. Und zwar ist der Grenzwert der Folge $\lim_{n\to\infty} x^n \to 0 \text{für} |x| < 1$ gleich Null.

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}
$$

Beispiel für $z = \frac{1}{2}$:

$$
f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2
$$

Da die geometrische Reihe die nullte Potenz $z^0 = 1 + \ldots$ mit dazu nimmt, ist dies äquivalent zu dem vorherigen Ergebnis.

1.6 Reihenentwicklung der Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$

Der Term $\frac{1}{z}$ hat besondere Eigenschaften. Man erkennt die Besonderheit zum Beispiel, wenn man versucht den Term zu integrieren: $\int \frac{1}{z} dz$. Auf Grund der Basis der Gleichung 19 können wir den Term jedoch in einer Reihe entwickeln:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-w} &= \sum_{n=0}^{\infty} w^n \\
mit|w| &< 1 \Leftrightarrow \\
\frac{1}{1-((-1)(z-1))} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \qquad mit \quad w = (-1)(z-1) \Leftrightarrow \\
\frac{1}{1-(-z+1))} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \Leftrightarrow \\
\frac{1}{1+z-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \Leftrightarrow \\
\frac{1}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir:

Definition: Reihenentwicklung von $\frac{1}{z}$
Der Term $\frac{1}{z}$ lässt sich in einer Reihe Entwickeln:

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \qquad mit \quad |1-z| < 1 \tag{21}$$

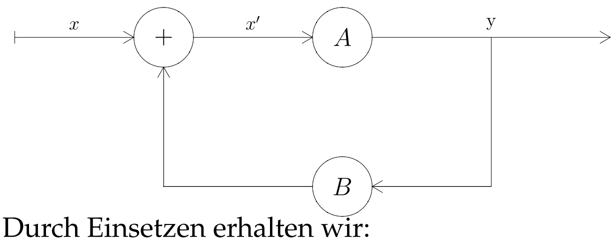
Insbesondere im Hinblick auf die Integrierbarkeit ist das ein Gewinn.

$$\int \frac{1}{z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{n+1}}{n+1} \qquad mit \quad |1-z| < 1 \Leftrightarrow \tag{22}$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)} (z-1)^n}{n} \tag{23}$$

1.7 Geometrische Reihe und Feedback

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist der Zusammenhang zwischen der geometrischen Reihe und rückgekoppelten Systemen. Daher betrachten wir nun einen einfachen Signalflussgrafen mit Feedback:



Wir können folgende Gleichungen aufstellen:

$$y = Ax'$$
$$x' = x + By$$

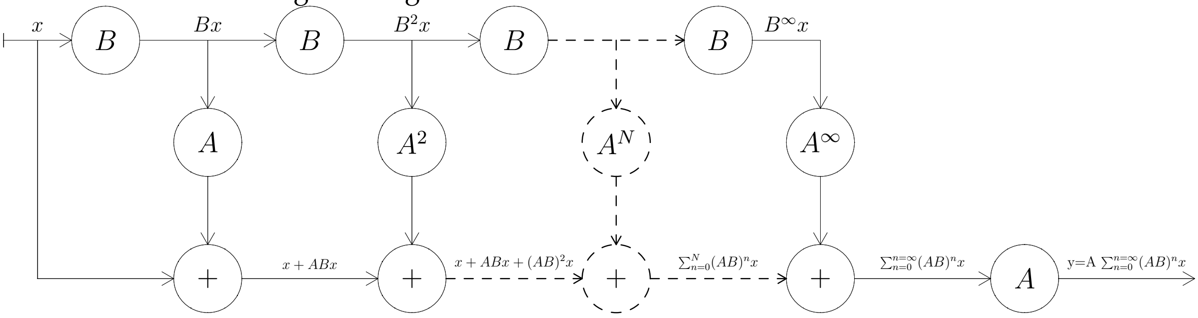
Durch Einsetzen erhalten wir:

$$y = A\,(x + By) \Leftrightarrow \tag{24}$$
$$y = Ax + ABy \Leftrightarrow \tag{25}$$
$$y(1-AB) = Ax \Leftrightarrow \tag{26}$$
$$y = \frac{Ax}{1-AB} \tag{27}$$

Wie man sieht handelt es sich auch hier um die geometrische Reihe. Wir können also schreiben:

$$y = \frac{A}{1-AB} x \Leftrightarrow \tag{28}$$
$$y = A \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} A^n B^n \right) x \tag{29}$$
$$\tag{30}$$

Wenn wir hierzu den Signalflussgrafen zeichnen erhalten wir:



Bei technischen Anwendungen ist die Variable B oft ein UnitDelay was oft ein gespeicherter Abtastwert darstellt. Mathematisch wird der Operator wie folgt beschrieben:

Definition: Unit Delay $\frac{1}{z^k}$
Der Unitdelay operator kann im Zeitbereich definiert als

$$z^{-k}[x_j(n)] = x_j(n-k) \tag{31}$$

Bei gleichbleibend diskreten Abtastwerten ist es also der $k * Abtastzeit$ alte Wert des Signals.
Später werden wir sehen, dass er sich mathematisch aus der diskretisierten Laplacetransformierten entwickelt hat. Man bekommt Ihn mit Hilfe des Verschiebungssatzes:

$$z^{-k} = e^{-kTs} \tag{32}$$

Dabei ist s die unabhängige Variable der Laplacetransformierten und T die Abtastzeit.

Damit ist ein Rückgekoppeltes System ein System mit unendlichem Gedächtnis. Auch hier zählt die hinreichende Bedingung für Stabilität:

$$|AB| < 1 \tag{33}$$

Nur damit erhält man abklingende Werte für beliebige Eingangssignale nach dem Abschalten.

1.8 Herleitung der Eulerreihe und momentane Verzinsung

Gegeben ist ein Anfangsbetrag $a(0)$ sowie ein Zinssatz p. Zu jedem diskreten Zeitpunkt t soll nun neu verzinst werden. Demnach entwickelt sich Betrag wie folgt:

$$\begin{gathered}
a(0) = a(0)\\
a(1) = a(0) + a(0) * p = a(0) * (1+p)\\
a(2) = a(1) + a(1) * p = a(0) * (1+p) + a(0) * (1+p) * p = a(0) * (1+p) * (1+p)\\
a(3) = a(2) + a(2) * p = a(0) * (1+p) * (1+p) + a(0) * (1+p) * (1+p) * p = a(0) * (1+p) * (1+p) * (1+p)\\
a(t+1) = a(t) + a(t) * p = a(0) * (1+p)^{t+1}
\end{gathered}$$

Damit gilt generell:

$$a(n) = a(0) * (1+p)^n \tag{34}$$

Wenn wir nun kontinuierlich verzinsen, also zu jedem Zeitpunkt, im Gegenzug aber den Zinssatz gegen null gehen lassen erhalten wir die eulersche Zahl:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{35}$$

Diesen Ausdruck betrachten wir nun etwas genauer. Hierfür verwenden wir den binomischen Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \tag{36}$$

Wir erhalten mit $a = 1$ und $b = \frac{1}{n}$:

$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \tag{37}$$

Der Term $\frac{n!}{(n-k)!}$ kann auch geschrieben werden als:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n*(n-1)*(n-2)*\cdots*(n-k+1)*(n-k)*(n-k-1)*(n-k-2)*\cdots*(n-n)}{(n-k)*(n-k-1)*(n-k-2)*\cdots*(n-n)}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n*(n-1)*(n-2)*\cdots*(n-k+1)$$

Mit dieser Umstellung erhalten wir:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n*(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n*(n-1)*(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n \tag{38}$$

$$= 1+1+\frac{n^2*(1-\frac{1}{n})}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n^3*(1-\frac{1}{n})*(1-\frac{2}{n})}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n \tag{39}$$

$$= 1+1+\frac{(1-\frac{1}{n})}{2!}+\frac{(1-\frac{1}{n})*(1-\frac{2}{n})}{3!}+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n \tag{40}$$

Zuletzt bilden wir den Limes und erhalten die anschauliche Darstellung der eulerschen Zahl:

Definition: Eulersche Zahl
Die Eulersche Zahl ergibt sich auf natürliche Weise aus der momentanen Verzinsung:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \tag{41}$$

1.9 Offene und abgeschlossene Mengen

Eine komplexe Menge D heißt offen, falls man in jedem Punkt der Menge einen Kreis mit einem Radius größer Null zeichnen kann, welcher noch ganz in D enthalten ist. Konkret bedeutet das, dass man den Rand der Menge als Grenzwert definiert, wobei der Grenzwert selbst nicht mehr Bestandteil der Menge ist.

Definition: Offene Menge
Eine Menge D heißt offen, falls es zu jedem Punkt $p \in D$ eine Zahl $\epsilon > 0$ gibt so dass die ϵ-Umgebung:

$$U_\epsilon(p) := z \in \mathrm{R}^2; |a - p| < \epsilon$$

ganz in D enthalten ist.

Beispiel: Die Menge M_o aller Punkte im inneren des Einheitskreises, wobei die Menge der Punkte des Einheitskreises nicht Bestandteil der Menge sind, ist offen.

$$M_O := z \in \mathrm{C}; |z| < 1$$

Definition: Abgeschlossene Menge
Eine Menge D heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist, oder wenn sich der Grenzwert des Randes Bestandteil der Menge ist.

Beispiel: Die Menge M_a aller Punkte im inneren des Einheitskreises, wobei die Menge der Punkte auf dem Einheitskreises Bestandteil der Menge sind, ist abgeschlossen.

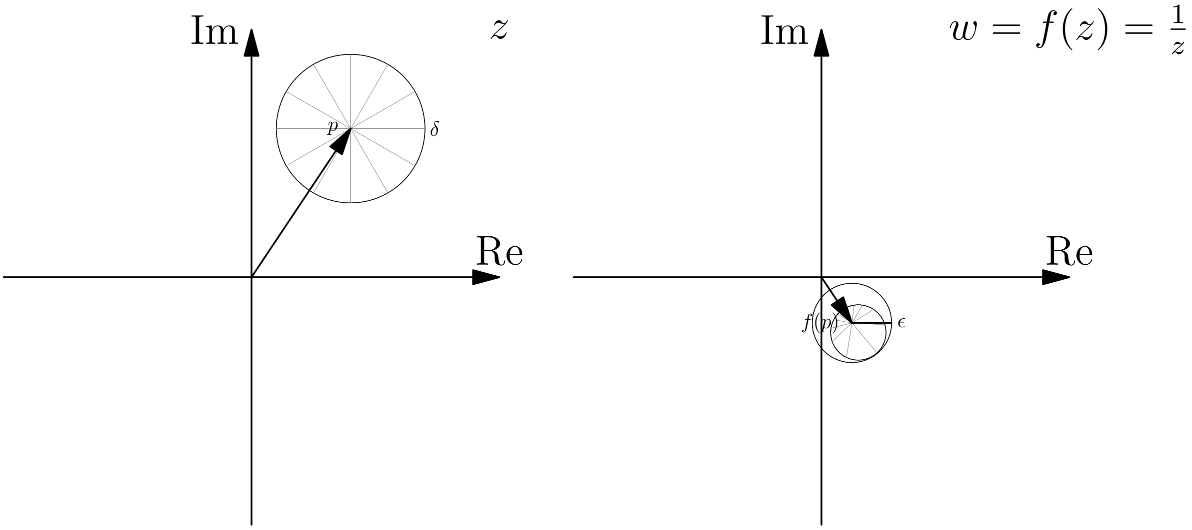
$$M_A := z \in \mathrm{C}; |z| \leq 1$$

1.10 Stetigkeit

Die Stetigkeit ist eine Eigenschaft, welche eine Funktion innerhalb ihres Definitioinsbereiches D erfüllen kann.
Sie ist auf zwei unterschiedlichen Betrachtungsebenen definiert welche jedoch das Selbe bedeuten. Die $\epsilon - \delta$-Stetigkeit ist ein Einschlusskriterium.
Um die Stetigkeit in einem Punkt p zu prüfen wählt man zuerst ein $\epsilon > 0$ und zeichnet einen Kreis um den Punkt $f(p)$ mit Radius ϵ. Nun muss es einen Kreis mit dem Radius $\delta > 0$ um p geben, so dass alle Punkte welche sowohl im Kreis mit dem Radius δ um p, als auch im Definitionsbereich $z \in D$ liegen ganz ins innere des Kreises um $f(p)$ mit dem Raidus ϵ abgebildet werden.
Man kann also die Werte $|f(z) - f(p)|$ in einem Kreis mit dem radius ϵ einschließen durch geeignete Wahl der Punkte um p durch den Radius δ. Insbesondere kann man das ϵ um den Punkt $f(p)$ unendlich klein fordern, und es muss ein δ dazu geben.

Definition: ϵ-δ-Stetigkeit einer Funktion
Eine Funktion $f(z)$ ist stetig im Punkt p falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert für welches gilt:

$$\text{Wenn} \qquad |f(z) - f(p)| < \epsilon \qquad \text{dann gibt es ein } \delta \qquad |z - p| < \delta, \qquad z, p \in D$$



Weil es oft sehr wichtig ist, dass man das ϵ beliebig klein fordern darf kommen wir auf eine zweite Definition der Stetigkeit, das **Folgenkriterium**. Wir haben gesehen dass eine Folge p_n gegen eine Zahl p konvergiert, wenn die Differenzenfolge $p_n - p$ eine Nullfolge ist. Da eine Folge konvergiert, wenn Ihre Beträge konvergieren erhatlen wir:

$$lim_{n\to\infty}|p_n - p| \to 0$$

Wenn wir nun zeigen können dass $lim_{n\to\infty}f(p_n) \to f(p)$ dann ist die Funktion f im Punkt p stetig.

Definition: Stetigkeit einer Funktion (Folgenkriterium)
Wenn für jede Folge mit der Eigenschaft:

$$lim_{n\to\infty}p_n \to p$$

gilt:

$$lim_{n\to\infty}f(p_n) \to f(p)$$

Dann ist die Funktion im Punkt p stetig. Insbesondere sind Konvergenzpunkte eindeutige Punkte.

Das Problem am Folgekriterium ist, dass man hier für jede mögliche Folge beweisen müsste, dafür kann man oft leicht einen Gegenbeweis erbringen.

1.11 Eingenschaften von Funktionen

Funktionen oder Abbildungen haben bestimmte Eigenschaften. Merkmale einer Funktion sind unter anderem **Injektivität**, **Surjektivität** und **Bijektivität**. Diese Eigenschaften werden hier definiert.
Wenn jedes Element des Definitionsbereiches einer Funktion auf genau ein Element des Abbildungsbereiches fällt,dann ist die Funktion injektiv.

Definition: Injektivität
Eine Funktion $f : D \to F$ ist injektiv falls gilt:

$$\begin{array}{lcc} Wenn: & z_1 \neq z_2 & z_1, z_2 \in D \\ Dann \quad gilt: & & f(z_1) \neq f(z_2) \end{array}$$

Surjektivitä ist eigentlich eine Eigenschaft, welche man oft schon implizit annimt. Sie besagt, dass wenn eine Funktion durch das Abbilden ihres Definitionsbereiches D jedem Element des Ergebnisbereiches F mindestens ein Element zuordnet, dann ist die Funktion surjektiv.

Definition: Surjektivität
Eine Funktion $f : D \to F$ ist surjektiv falls gilt:

$$f(D) = F$$

Die Bijektivität ist nun eine Kombination von beidem.

Definition: Bijektivität
Eine Funktion $f : D \to F$ ist bijektiv falls sie **injektiv** und **surjektiv** ist

1.12 Stetigkeit der Funktion $\frac{1}{z}$ in $\mathbb{C}^{\bullet}$

Das Symbol $\mathbb{C}^{\bullet}$ steht für die in dem Punkt $0+j0 = 0$ gelochte komplexe Ebene. Es ist leicht einzusehen dass gelten muss:

Definition: Stetigkeit der Funktion $\frac{1}{z}$ in $\mathbb{C}^{\bullet}$
Die Funktion:

$$f(z) = \frac{1}{z} : \qquad \mathbb{C}^{\bullet} \to \mathbb{C} \tag{42}$$

ist in der in 0 gelochten komplexen Ebene stetig.

Die Reihenentwicklung der Funktion $\frac{1}{z}$ ist kein Polynom, sondern eine unendliche Reihe.

1.13 Stetigkeit von Polynomen

Jedes Polynom der Form:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z + a_3 z + \ldots + a_n z^n \tag{43}$$

ist stetig. Das ist ein Resultat aus den Stetigkeitssätzen:

Definition: Stetigkeitssätze
Die Summe, Differenz und das Produkt zweier stetiger Funktionen sind stetig. Polynome haben im Gegensatz zu Reihen einen endlichen Grad n

1.14 Zusammensetzung zweier Funktionen

Gegeben sind zwei Funktionen f und g:

$$f : D_f \to W_f \qquad und \qquad g : D_g \to W_g \tag{44}$$

Dabei bildet die Funktion f ihren Definitionsbereich D_f auf ihren Wertebereich $W_f = f(D_f)$ ab, und die Funktion g bildet ihren Definitionsbereich D_g auf ihren Wertebereich $W_g = g(D_g)$ ab.
Wenn gilt:

$$W_f \subseteq D_g \tag{45}$$

Also wenn der Wertebereich von f im Definitionsbereich von g enthalten ist, dann kann man eine Zusammensetzung definieren:

$$b(z) = g(f(z)) \tag{46}$$

Definition: Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen
Die Zusammensetzung zweier stetiger Funktionen ist stetig.

Gegeben ist eine Funktion $f : D_f \to W_f$ welche keine Nullstellen hat. Dann ist auch die zusammengesetzte Funktion:

$$\frac{1}{f} : D_f \to W_f \tag{47}$$

setetig. Wenn also $g(z) = \frac{1}{z} : \mathbb{C}^\bullet \to \mathbb{C}$, dann gilt:

$$W_f \subseteq D_g \tag{48}$$

genau dann, wenn $W_f = f(D_f)$ keine Nullstellen hat.

Definition: Unstetigkeitsstellen einer Rationalen Funktion
Polstellen sind die einzigesten Unstetigkeitsstellen rationaler Funktionen.

$$f(z) = \frac{a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n}{b_0 z^0 + b_1 z^1 + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n} \tag{49}$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind Polstellen des zusammengesetzten Polynoms.

1.15 Zusammensetzung zweier Potenzreihen

Es sollen nun zwei Potenzreihen $P(z)$ und $Q(z)$ mit $Q(0) = 0$ gegeben sein.

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \tag{50}$$
$$Q(z) = b_1 z + a_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4 + \dots \tag{51}$$

Gesucht sind die Koeffizienten c_n der Potenzreihe $Z(z) = P(Q(z))$.

$$Z(z) = P(Q(z)) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \dots \tag{52}$$
$$\tag{53}$$

Dadurch dass ein Polynom all durch seine Ableitungen bestimmt ist, verwenden wir den Ansatz:

$$Z^{(n)}(0) = P(Q(0))^{(n)} \tag{54}$$

Wir entwickeln also das Polynom $Z(z)$ um den Entwicklungspunkt 0.

$$c_0 = P(Q(0)) = a_0 \tag{55}$$
$$c_1 = P^{'}(Q(0))Q^{'}(0) = a_1 b_1 \tag{56}$$
$$2c_2 = P^{''}(Q(0))\left(Q^{'}(0)\right)^2 + P^{'}(Q(0))Q^{''}(0) = 2a_2 b_1^2 + 2a_1 b_2 \tag{57}$$
$$6c_3 = P^{'''}(Q(0))\left(Q^{'}(0)\right)^3 + 3P^{''}(Q(0))Q^{'}(0)Q^{''}(0) + P^{'}(Q(0))Q^{'''}(0) = 6a_3 b_1^3 + 12a_2 b_1 b_2 + 6a_1 b_3 \tag{58}$$
$$\dots \tag{59}$$

Somit lauten die Koeffizienten des zusammengesetzten Polynoms $Z(z) = P(Q(z))$:

$$Z(z) = a_0 + a_1 b_1 z + (a_2 b_1^2 + a_1 b_2) z^2 + (a_3 b_1^3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_1 b_3) z^3 + \dots \tag{60}$$

1.16 Umkehrfunktion

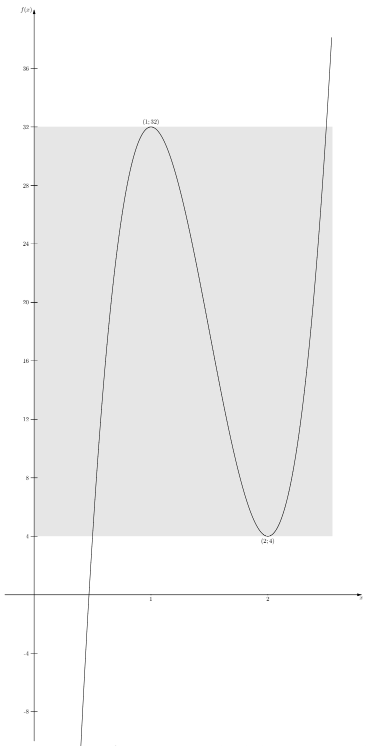
Eine Funktion f ist eine eindeutige Abbildung. Das bedeutet, dass sie jedem Element aus ihrem Definitionsbereich D_f ein Element aus ihrem Wertebereich W_f zuordnet. Man schreibt dann:

$$f : D_f \to W_f ; x \to y \tag{61}$$

Eine Funktion ordnet also jedem x genau ein y zu. Dabei können aber zwei unterschiedlichen x_1, x_2 dem Selben y-Wert zugeordnet werden, oder allgemein gilt:
n unterschiedlichen $\{x_n\}$ können genau einem Wert y zugeordnet werden. Jedoch darf unter keinen Umständen einem x zwei unterschiedlichen y_1, y_2 zugeordnet werden.

Definition: Funktion
Eine Funktion ist eine Eindeutige Abbildung des Definitionsbereichs D_f auf ihren Wertebereich W_f.

$$f : D_f \to W_f ; x \to y$$



Als Beispiel schauen wir uns ein Polynom dritten Grades in $\mathbb{R}$ an :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Wir fordern von dem Polynom zwei Extrema. Ein Maxima bei $f(1) = 32$ und ein Minima bei $f(2) = 4$.

$$\begin{aligned} f(1) &= 32 \\ f'(1) &= 0 \\ f(2) &= 4 \\ f'(2) &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben also vier Gleichungen für die vier unbekannte a, b, c, d womit wir die Koeffizienten erhalten:

$$f(x) = 56x^3 - 252x^2 + 336x - 108$$

An dem grauen Bereich kann man gut erkennen, dass einige x mehrfach auf die Zahlen wischen $[4; 32]$ abgebildet werden.

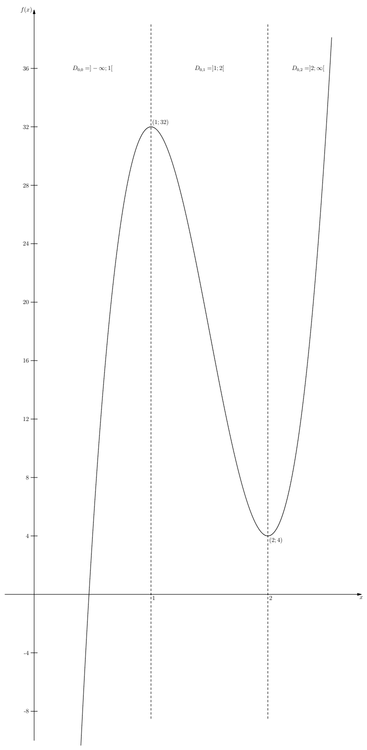
Da mehrfache Abbildungen des Definitionsbereiches D_f auf den Wertebereich W_f zulässig sind, und kein x zwei verschiedenen y zugeordnet ist, ist $f(x)$ eine Funktion. Die Funktion $f(x)$ ist aber auf Grund des grauen bereiches nicht injektiv. Wir wollen uns jetzt zwei Dinge klar machen:
1) Die Zusammensetzung $b(z) = \frac{1}{f(z)}$ ist außerhalb der Nullstellen von $f(z)$ stetig.
2) Die Zusammensetzung $b(z) = \frac{1}{f(z)}$ ist nicht die Umkehrfunktion von $f(z)$.
Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus dem Satz für zusammengesetzte Funktionen und der Stetigkeit von $f(z) = \frac{1}{z} \quad mit \quad z \in \mathbb{C}^{\bullet}$.
Für die zweite Behauptung müssen wir erst die Umkehrfunktion charakterisieren.

Definition: Umkehrfunktion
Gegeben ist eine Funktion $f(z) : D_f \to W_f$. Dann gilt für die dazugehörige Umkehrfunktion $f^{-1} : D_{f^{-1}} \to W_{f^{-1}}$:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(z_1)) &= z_1 \quad z_1 \quad \in W_f, \\ f^{-1}(f(z_2)) &= z_2 \quad z_2 \quad \in D_f \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion bildet also den Wertebereich W_f auf den Definitionsbereich D_f ab.

Weil die Umkehrfunktion eine Funktion ist, muss diese Umkehrung, also das Abbilden von W_f auf D_f eindeutig sein. Hierfür muss die Funktion $f : D_f \to W_f$ injektiv sein. Da unsere Beispielfunktion auf Grund der Werte im grauen Bereich $4 \leq y = f(x) \leq 32$ diese Eigenschaft nicht erfüllt, kann es keine globale Umkehrfunktion geben, welche auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig ist.
Wenn wir jedoch den Definitionsbereich in mehrere Defintionsbereiche $\{D_{0,0}, D_{0,1}, D_{0,2}\}$ zerlegen, so können wir injektive Teilbereiche Bestimmen. Wir betrachten nun nocheinmal das Abbild unserer Beispielfunktion:



Wir können nun die drei Definitionsbereiche

$$D_{0,0} =]-\infty; 1[\quad offen$$
$$D_{0,1} =]1; 2[\quad offen$$
$$D_{0,2} =]2; \infty[\quad offen$$

definieren. Es ist leicht einzusehen, dass die Krenzen der injektiven Definitionsbereiche einer Funktion $f(z)$ genau an den Stellen liegen müssen bei welchen $f'(z) = 0$ gilt. Dadurch entsteht folgender Satz: In einem Punkt a

$$a \in D \quad gelte \quad f'(a) \neq 0$$

für eine Funktion f mit stetiger Ableitung in D. Dann gibt es eine offene Menge:

$$D_0, \quad D_0 \subset D, \quad a \in D$$

so dass die Einschräkung $f|D_0$ injektiv ist.

1.17 Die komplexe Exponentialfunktion

1.18 Der Logarithmus

1.19 Stetigkeit der komplexen Logarithmusfunktion

Wir sind auf der Suche nach dem komplexen Logarithmus, für welchen gelten soll:

$$Log(e^z) = z, \qquad Log(ab) = Log(a) + Log(b)$$

Zur Konstruktion der Logarithmusfunktion ist die Betrachtung der Exponentialfunktion hilfreich. Zeichnet man in den Definitionsbereich der Exponentialfunktion ein Gitter, so kann man sich den Abgebildeten Bereich gut vorstellen, ohne Berechnungen durchführen zu müssen:

$$w = e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x(cos(y) + jsin(y)) \tag{62}$$
$$mit \qquad z \in \mathbb{C} \tag{63}$$

Wir wählen den Definitionsbereich der Exponentialfunktion:

$$f : D \to F \qquad D \in \mathbb{C} \wedge -\pi \leq Im \leq \pi \wedge -\infty \leq Re \leq \infty$$

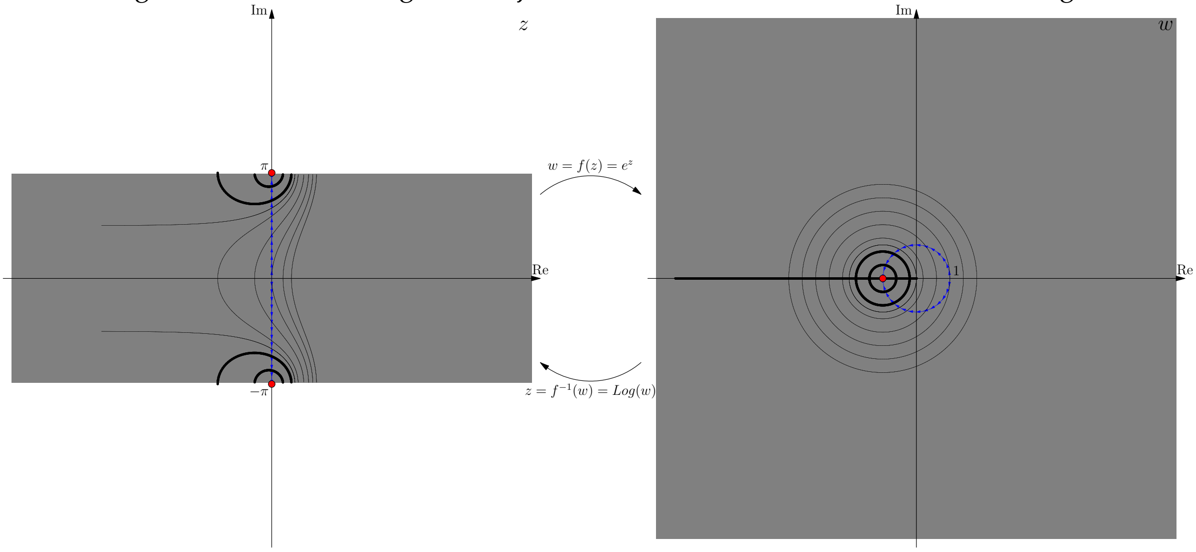
Unser Definitionsbereich ist also auf der reellen Achse offen, und auf der imaginären Achse abgeschlossen. Das der Definitionsbereich auf der reellen Achse offen ist liegt daran, dass man ∞ nie erreichen kann. Wir bilden nun die Menge der Punkte:

$$z = a + jb \Leftrightarrow$$
$$a = 0 \wedge -\pi \leq b \leq \pi$$

durch die Exponentialfunktion ab. Dabei fällt uns auf, dass gilt:

$$e^{j-\pi} = e^{j\pi} = -1 \Leftrightarrow$$
$$f(z_0) = f(z_1) \wedge z_0 \neq z_1$$

woraus folgt, dass die Abbildung nicht **injektiv** ist. Siehe roter Punkt in der Zeichnung.



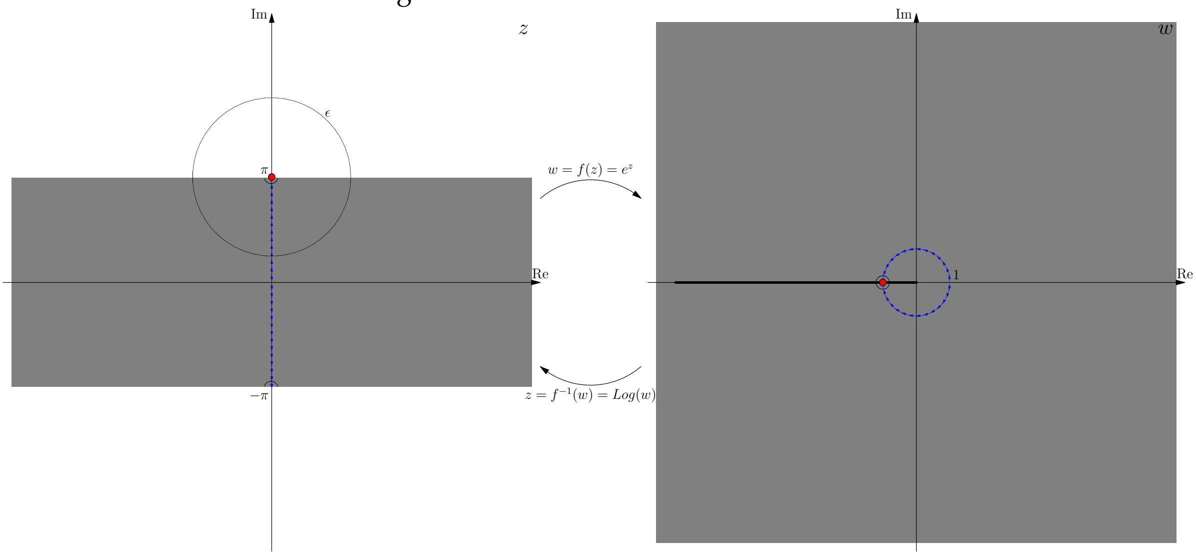
Da eine Funktion, welche nicht injektiv ist keine eindeutige Umkehrabbildung besitzt, muss der Definitionsbereich eingeschränkt werden. Wir machen den Definitionsbereich der Exponentialfunktion bei der negativen imaginären Achse offen:

$$f : D \rightarrow F \qquad D \in \mathbb{C} \wedge -\pi < Im \leq \pi \wedge -\infty \leq Re \leq \infty$$

Nun gehört die Menge der Punkte für $Im = -\pi$ nicht mehr zum Definitionsbereich und somit gilt:

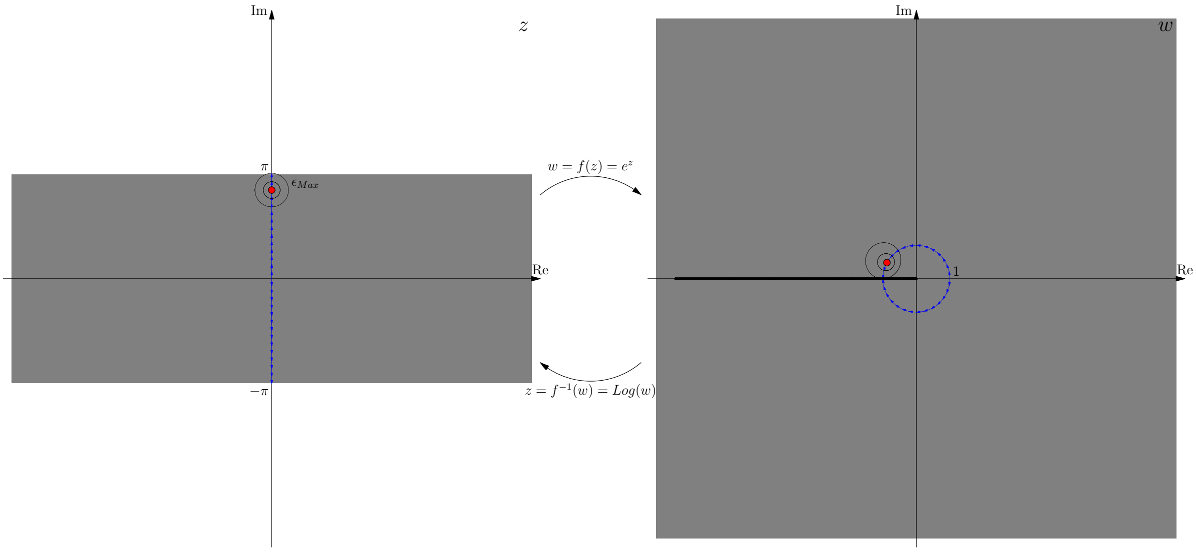
$$e^{j\pi} = -1$$

Wir hätten auch mit Hilfe der **stetigkeit** argumentieren können. Dabei Zeichnen wir mal Kreise in der w ebene mit dem Radius δ mit Mittelpunkt auf der negativen reellen Achse. Und siehe da, das dazugehörige ϵ muss beide Punkte in der z Ebene umschließen. Und somit gibt es kein δ welches zu einem $\epsilon < 2\pi$ führt . Auch hier merken wir, dass der Definitionsbereich in der z-Ebene bei $Im = -\pi$ eingeschränkt werden muss.
Nach dem Wir den Definitionsbereich der Exponentialfunktion also eingeschränkt haben werfen wir einen zweiten Blick auf die Stetigkeit.

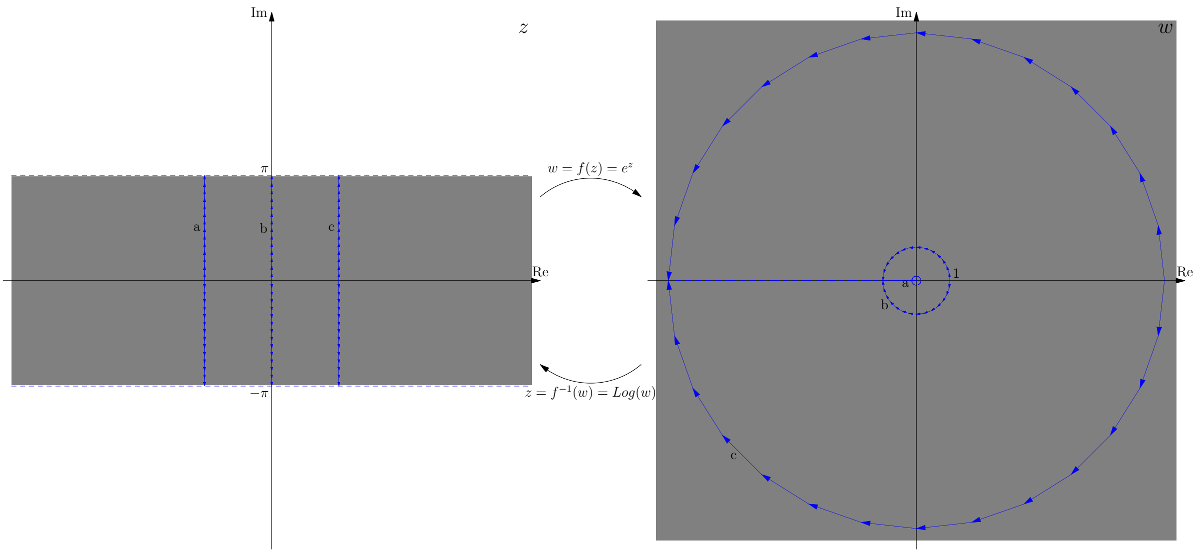


Versuchen wir einen Kreis um den Punkt p zu ziehen, so erhalten wir wieder eine Punktemenge bei $-\pi$.Wählen wir für $|z-p| = 0$ also den Radius 0 oder $z = p$ erhalten wir für $|f(z) - f(p)| = 0$ und so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass $|f(z) - f(p)| < \epsilon$ wenn $|z - p| < \delta$. Also hätten wir jetzt Stetigkeit erreicht.
Es stellt sich jetzt die Frage ob es ein δ gibt welches unter Breücksichtigung von $|z-p| < \delta$ zu $|z-p| = 0$ führt. Hierfür macht man sich nochmal den Begriff eines offnen Gebietes klar. Man stellt fest, $|z-p| < \delta$ ist ein offenes Gebiet, und somit giebt es nur die Annährung an den Rand und streng genommen zwischen jedem Punkt und dem Rand unendlich viele Punkte. Das Heißt es gibt kein δ welches zu $|z-p| = 0$ führt.
Somit muss der Definitionsbereich der Exponentialfunktion nochmal eingeschränkt werden, in dem wir das Gebiet auch in Richtung $+\pi$ offen machen.

$$f : D \to F \qquad D \in \mathbb{C} \wedge -\pi < Im < \pi \wedge -\infty \leq Re \leq \infty$$



Nun ist die Stetigkeit erfüllt, da für jedes ϵ ein δ existiert für welches gilt:
Wenn $|f(z) - f(p)| < \epsilon$ dann ist $|z - p| < \delta$. Wie man sieht, ist die Logarithmusfunktion auf Grund der Punkte auf der negativen reellen Achse nicht stetig.



Die Exponentialfunktion bildet also den Streifen $-pi < Im(z) < pi$ auf eine Zahlenebene ab, welche an der negativen reellen Achse geschlitzt ist.
Des Weiteren sieht man, dass alle Zahlen z mit negativem Realteil durch die Exponentialfunktion in das Innere des Einheitskreises abgebildet werden (a) und alle Zahlen mit positivem Realteil werden außerhalb des Einheitskreises abgebildet (c). Ist der Realteil einer Zahl Null, so wird diese auf den

Einheitskreis abgebildet (b).
Ein weiterer interessanter Punkt ist die Null. TODO!!!
Eine wichtige Erkenntnis ergibt sich aus der Betrachtung der Reihenentwicklung des Logarithmus.

$$ln(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \Leftrightarrow$$
$$ln(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n \Leftrightarrow$$
$$ln'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} n(z-1)^{n-1} \Leftrightarrow$$
$$ln'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(z-1)^{n-1} \Leftrightarrow$$
$$ln'(z) = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^{n}(z-1)^{n}$$

Wir supstituieren nun den Term $(z-1) = w$:

$$1 - w + w^2 - w^3 + w^4 - w^5 + \ldots + w^n = \sum_{n=o}^{\infty} (-w)^n \Leftrightarrow$$
$$\sum_{n=Gerade}^{\infty} (w)^n - \sum_{n=Ungerade}^{\infty} (w)^n \Leftrightarrow$$

Die geraden Terme konvergieren zu:

$$(1 + w^2 + w^4 + w^6 + \ldots + w^n)(1-w^2) = (1-w^2) + (w^2 - w^4) + (w^4 - w^6) + \ldots + (w^n - w^{n+2}) \Leftrightarrow$$
$$(1 + w^2 + w^4 + w^6 + \ldots + w^n) = \frac{1 - w^{n+2}}{1 - w^2}$$

Für die ungeraden Terme gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder ist die letzte Potenz eine gerade oder eine ungerade Zahl. In beiden Fällen konvergieren die Reihe.
Für den Fall dass n eine gerade Zahl ist gilt:

$$(w + w^3 + w^5 + w^7 + \ldots + w^{n-1})(1-w^2) = (w - w^3) + (w^3 - w^5) + (w^5 - w^7) + \ldots + (w^{n-1} - w^{n+1}) \Leftrightarrow$$
$$(w + w^3 + w^5 + w^7 + \ldots + w^{n-1}) = \frac{w - w^{n+1}}{1 - w^2}$$

Damit konvergiert die Reihe:

$$1 - w + w^2 - w^3 + w^4 - w^5 + \ldots + w^n = \sum_{n=o}^{\infty} (-w)^n \Leftrightarrow$$
$$\frac{1 - w^{n+2} - w + w^{n+1}}{1 - w^2} = \frac{1 - w + w^{n+1}(1-w)}{(1-w)(1+w)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1 + w^{n+1}}{1 + w}$$

Mit der Bedingung $|w| < 1$ erhalten wir für die hier betrachtete Reihe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + w^{n+1}}{1 + w} = \frac{1}{1 + w}$$

Durch resubstitution von $w = (z-1)$ ergibt sich:

$$ln'(z) = \frac{1}{z} \qquad mit \quad |z-1| < 1 \tag{64}$$

Definition: Der komplexe Logarithmus
Der komplexe Logarithmus wird durch den sogenannten Hauptzweig definiert mit $-\pi < Im(z) < \pi, -\infty < Re(z) < \infty$. Dort ist er komplex differenzierbar und es gilt:

$$Log(e^z) = z \qquad e^z = w \in \mathrm{C} - y \in \mathrm{R}; y \leq 0 \tag{65}$$

Als besonders interessant wird sich im Zusammenhang mit dem Cauchy-Riemannschen Integralsatz herausstellen dass gilt:

$$Log'(z) = \frac{1}{z} \tag{66}$$

Im bijektiven Hauptzweig ist das Argument eindeutig definiert:

$$Log(z) = Log(re^{j\varphi}) = Log(r) + Log(e^{j\varphi}) = log(|z|) + iArg(z) \tag{67}$$

Allgemein gilt aber:

$$Log(z) = log(|z|) + i(Arg(z) + 2\pi k) \qquad \text{mit} \qquad k \quad \in \quad \mathbb{Z} \tag{68}$$

1.20 Die Allgemeine Potenz a^b

Durch den Logarithmus lassen sich Potenzen verallgemeinern. Und zwar definiert man die Potenz a^b durch:

$$a^b := e^{b\log(a)} \tag{69}$$

Wir erhalten:

Definition: Potenzen
Durch Logarithmen lassen sich Potenzen verallgemeinern:

$$\{a^b\} := e^{b(log|a|+jArg(a)+j2\pi k)} \qquad mit \quad a, b \in \mathbb{C} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{70}$$

Für ein ganzes b erhalten wir zum Beispiel wieder die nun etwas erweiterte Formel von Moivre

$$\{a^b\} := e^{b\log|a|}\{cos(bArg(a) + 2\pi kb) + jsin(bArg(a) + 2\pi kb)\} \tag{71}$$

$$mit \quad a \in \mathbb{C} \quad b \in \mathbb{N} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{72}$$

Allgemein gilt aber:

$$a^{(x+jy)} = e^{x\log|a| - Arg(a)y - 2\pi k y}\{cos(xArg(a) + 2\pi kx + y\log(|a|)) + jsin(xArg(a) + 2\pi kx + y\log(|a|))\} \tag{73}$$

Für positive ganze a ist diese Darstellung auch interessant, da $Arg(a)$ null wird (ζ Funktion).

$$a^{(x+jy)} = e^{x\log|a| - 2\pi k y}\{cos(2\pi kx + y\log(|a|)) + jsin(2\pi kx + y\log(|a|))\} \tag{74}$$

1.21 Die Wurzeln komplexer Zahlen

In diesem Abschnitt geht es darum, wie man die n-te Wurzel aus den komplexen Zahlen zieht. Es geht also um die Berechnung des Ausdrucks $z^n = a \quad z \in \mathbb{C} \wedge a \in \mathbb{C}$.
Um dieses Problem anzugehen wird zunächst die Gleichung $z^n = 1 \quad z \in \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{N}_0$ gelöst. Wir suchen also nicht die Wurzel einer beliebigen komplexen Zahl $\quad z \in \mathbb{C}$, sondern fragen uns, welche und wieviele "verschiedene" Zahlen $\quad \zeta \in \mathbb{C}$ es gibt, welche die Gleichung $z^n = 1$ erfüllen. Betrachtet man eine bliebige Zahl ζ in Form der Kugelkoordinaten, so wird klar, dass sich dessen Lönge für $|\zeta| = 1$ beim Potenzieren nicht ändert. Wäre $|\zeta| > 1$ so wäre auch jede Potenz $|\zeta^n| > 1$. Wäre $|\zeta| < 1$ so wäre auch jede Potenz $|\zeta^n| < 1$. Daraus folgt, dass sich jede von uns gesuchte Zahl ζ auf dem Einheitskreis befindet und sich somit dessen Länge nicht ändern kann.
Was sich beim Potenzieren jedoch ändern kann, ist der Winkel. Dies zeigt die Formel von Moivre, welche sich eindeutig aus dem Multiplikationsgesetz ergibt:

$$(cos(\varphi) + jsin(\varphi))^n = cos(n\varphi) + jsin(n\varphi) \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Wie bereits beschrieben, werden komplexe Zahlen multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert, und ihre Winkel addiert. Somit wird aus der n-ten Potenz einer Zahl ζ mit der Länge eins eine Multiplikation des Winkels mit n. Der Betrag ergibt sich zu $1^n = 1$.
Um also eine Zahl $z^n = 1 + j0 \quad z \in \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{N}_0$ zu finden muss die Forderung $Im\,(z^n) = 0$ erfüllt werden.

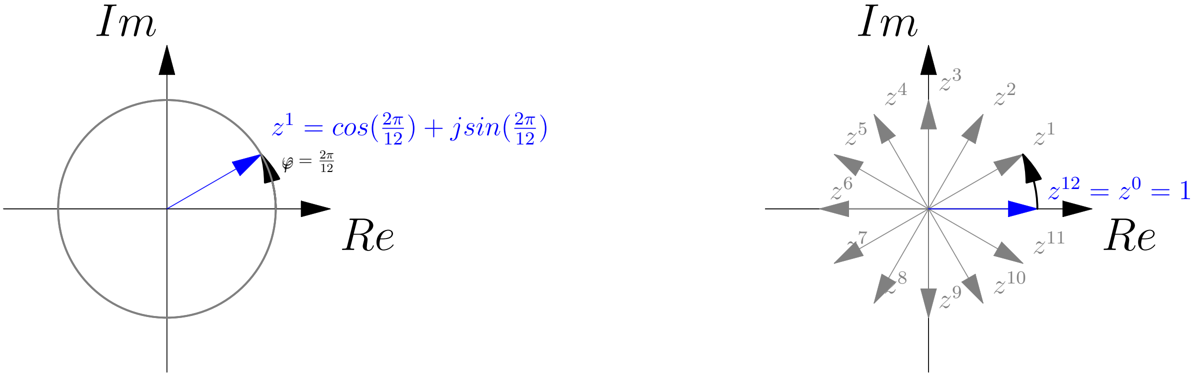
$$Im\,(z^n) = sin(n\varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

$$Re\,(z^n) = cos(n\varphi) \stackrel{!}{=} +1$$

Dies führt zu der einfachen linearen Gleichung:

$$n\varphi = 2\pi \Leftrightarrow$$
$$\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

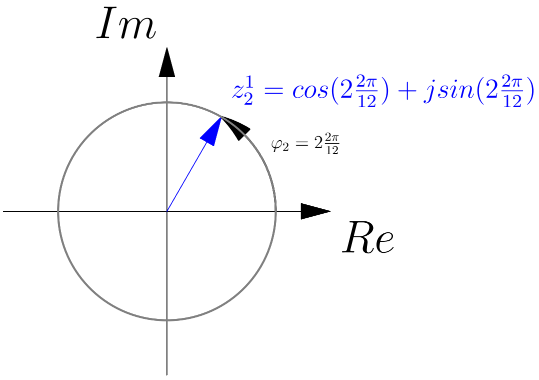
Beispielhaft wird in der folgenden Abbildung gezeigt, welche Zahl z die Gleichung $z^{12} = 1$ löst. Hierzu wird das Argument $\varphi = \frac{2\pi}{12}$ berechnet und dann potenziert.



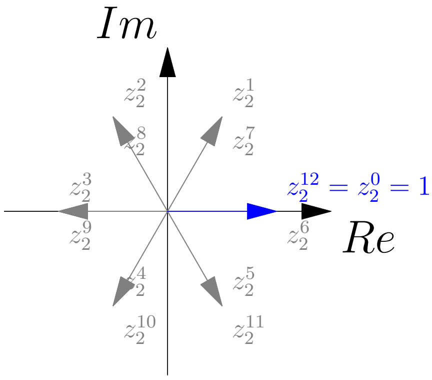
z welche $z^{12} = 1$ erfuellt

Potenzen von z

Es stellt sich nun die Frage, wieviele solche Zahlen z gibt es, welche die Gleichung $z^{12} = 1$ erfüllen. Wir wählen eine zweite Zahl z_2 für welche gelten soll $z_2^{12} = 1$. Dazu wählen wir ihr Argument zu $\varphi_2 = 2\frac{2\pi}{12}$.



z_2 welche $z_2^{12} = 1$ erfuellt



Potenzen von z_2

Auch für diese Zahl ist die Gleichung erfüllt. So gibt es mehrere Lösungen für diese Gleichung $z^n = 1 \quad z \in \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{N}_0$. Generell kann man sagen, man erhält die erste Lösungen z_1 durch Bilden des Arguments φ_1 für eine feste Potenz n:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{n}$$

Alle weiteren Lösungen erhlält man dann durch

$$\varphi_m = \varphi_1 m \Leftrightarrow$$
$$\varphi_1 = \frac{\varphi_m}{m} \quad m \in \mathbb{N}_0$$

Man erhält also unendlich viele Lösungen z_m durch Einsetzen:

$$\varphi_m = \frac{2\pi m}{n}$$

Für diese unendlich vielen Lösungen kann jedoch festgestellt werden, dass sie sich ab $m = n$ auf dem Einheitskreis wiederholen. Lediglich das Argument steigt linear. Die komplexe Zahl als Zeiger unterscheidet sich dann nicht mehr. Deshalb krenzt man den Definitionsbereich von m ein, und man kommt zu folgender Definition:

Definition: Einheitswurzel
Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene n-te Einheitswurzeln:

$$\zeta_\nu = cos\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right) + jsin\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right) \quad \nu \in 0 \leq \nu < n$$

Diese lösen die Gleichung $z^n = 1$.

Achtung, die unendlich vielen komplexen Einheitswurzeln lassen sich als komplexe Zahl durch Aufspalten in Real und Imaginärteil nicht mehr eindeutig unterscheiden, wohl aber durch ihren Betrag und ihr Argument. Somit kommt es wie schon gezeigt beim abbilden der gesamten komplexen Zahlenebene durch die Exponentialfunktion zu Überlappungen. Dies liegt daran, dass die Potenzreihe der komplexen Exponentialfunktion immer wieder zu den selben n Zahlen konvergiert, periodich zu 2π. Wichtig wird das, wenn man versucht eine Funktion eindeutig umkehrbar zu machen. Vorrausgesetzt es fallen zwei Zahlen aus dem definitionsbereich im abgebildeten Bereich usammen, so ist diese zahl nicht mehr eindeutig umkehrbar, und die Definition einer Funktion ist verletzt.

Nach dem die n-ten Einheitswurzeln anschaulich dargestellt worden sind, geht es jetzt zurück zum eigentlichen Problem der n-ten Wurzel: $z^n = a \quad z \in \mathbb{C} \wedge a \in \mathbb{C}$.
Hierfür überlegen wir uns wieder, wie wohl die erste Zahl z_1 aussehen muss, um diese allgemeinere Gleichung zu erfüllen. Zunächst sei die komplexe Zahl a in Kugelkoordinaten gegeben:

$$a = r\left(cos\left(\varphi\right) + jsin\left(\varphi\right)\right)$$

Der Betrag von z_1 muss nach der n-ten Potenz r sein. Somit erhalten wir den Betrag zu :

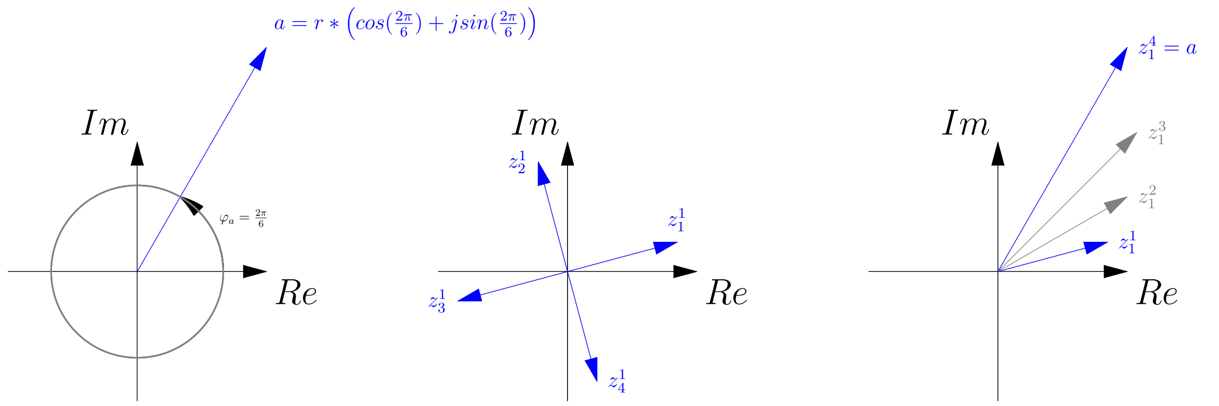
$$|z_1| = \sqrt[n]{r}$$

Für das Argument φ_1 von z_1 muss wieder gelten:

$$\varphi_a = \varphi_1 n \Leftrightarrow$$
$$\varphi_1 = \frac{\varphi_a}{n}$$

Somit erhalten wir z_1 für ein beliebiges n zu:

$$z_1 = \sqrt[n]{r}\left(cos\left(\frac{\varphi_a}{n}\right) + jsin\left(\frac{\varphi_a}{n}\right)\right)$$



Beliebige Zahl a Die vier vierten Wurzeln von a Potenzen von z_1

Auch hier kann man sich die Frage stellen, ob es noch weitere Zahlen gibt, welche die Gleichung $z^n = a$ läst. Dazu macht man sich klar, dass sich die Zahl z^n nicht ändert, wenn man sie mit einer Zahl $\zeta^n = 1 + j0$ multipliziert.Die Anforderungen an die Zahl ζ sind somit genau die selben, wie die Anforderungen an die n-ten Einheitswurzeln.
Somit erhalten wir die Lösungen für die allgemeinere Gleichung zu:

$$\zeta_\nu^{Allgemein} = z_1 \zeta_\nu$$

Man erhält unter Einschränkung des Definitionsbereiches von ζ_ν

Definition: n-te Wurzeln
Es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau n verschiedene n-te Wurzeln für jede komplexe Zahl a:

$$\zeta_\nu^{Allgemein} = \sqrt[n]{r_a}\left(cos\left(\frac{\varphi_a + 2\pi\nu}{n}\right) + jsin\left(\frac{\varphi_a + 2\pi\nu}{n}\right)\right) \qquad \nu \in 0 \leq \nu < n$$

Diese lösen die Gleichung $z^n = a \qquad mit \quad a = r_a e^{j\varphi_a}$.

1.22 Konjugiert komplexe Nullstellen von komplexen Polynomen mit reellen Koeffizienten

In diesem Abschnitt geht es darum, wiso komplexe Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten zueinander konjugiert auftreten.
Gegeben ist das Polynom $P(z)$:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0 z^0 \tag{75}$$

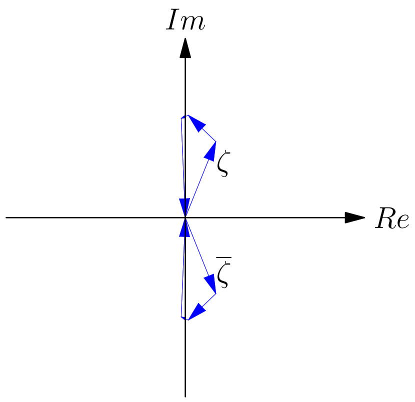
mit $z \in \mathbb{C} \wedge a \in \mathbb{R}$. Wir gehen davon aus dass ζ eine Nullstelle des Polynoms ist $P(\zeta) = 0$. Dann muss auch das kunjugiert komplexe $\overline{\zeta}$ des Polynoms eine Nullstelle sein wenn die Koeffizienten a reel sind $P(\overline{\zeta}) = 0$. Da unsere veränderlieche Variable komplex ist, läßt sie sich auch als komplexer Zeiger darstellen. Wir erhalten:

$$P(\zeta) = a_n \zeta^n + a_{n-1} \zeta^{n-1} + a_{n-2} \zeta^{n-2} + \cdots + a_2 \zeta^2 + a_1 \zeta^1 + a_0 \zeta^0 \Leftrightarrow$$
$$P(|\zeta|, \varphi) = a_n |\zeta^n| \left(cos(\varphi_\zeta n) + jsin(\varphi_\zeta n) \right) + a_{n-1} |\zeta|^{n-1} \left(cos(\varphi_\zeta (n-1)) + jsin(\varphi_\zeta (n-1)) \right)$$
$$+ \cdots + a_2 |\zeta|^2 \left(cos(\varphi_\zeta 2) + jsin(\varphi_\zeta 2) \right) + a_1 |\zeta|^1 \left(cos(\varphi_\zeta 1) + jsin(\varphi_\zeta 1) \right) + a_0 |\zeta|^0 \left(cos(\varphi_\zeta 0) + jsin(\varphi_\zeta 0) \right)$$

Wie unschwer zu erkennen ist, kann man das Polynom als Überlagerung von gewichteten Sinus- und Cosinustermen auffassen. Gehen wir mal davon aus wir setzen ein beliebiges $\zeta = a + jb$ ein, und erhalten als Ergebnis $P(\zeta) = \theta = c + jd$.
Was bekommen wir nun wohl für $P(\overline{\zeta}) = P(a - jb)$ heraus ?

$$P(\overline{\zeta}) = P(|\zeta|, -\varphi) = a_n |\zeta^n| \left(cos(\varphi_\zeta n) - jsin(\varphi_\zeta n) \right) + a_{n-1} |\zeta|^{n-1} \left(cos(\varphi_\zeta (n-1)) - jsin(\varphi_\zeta (n-1)) \right)$$
$$+ \cdots + a_2 |\zeta|^2 \left(cos(\varphi_\zeta 2) - jsin(\varphi_\zeta 2) \right) + a_1 |\zeta|^1 \left(cos(\varphi_\zeta 1) - jsin(\varphi_\zeta 1) \right) + a_0 |\zeta|^0 \left(cos(\varphi_\zeta 0) - jsin(\varphi_\zeta 0) \right)$$

Somit ist $P(\overline{\zeta})$ das an der reellen Achse gespiegelte von $P(\zeta)$ und somit gilt $P(\overline{\zeta}) = \overline{P}(\zeta)$ in unserem Fall also $P(\overline{\zeta}) = \overline{\theta} = c - jd$. Ist nun $P(\zeta) = 0$, so muß auch $P(\overline{\zeta}) = 0$ gelten.



Auf der linken Seite befindet sich eine Abbildung in welcher die einzelnen Terme für ein festes ζ überlagert dargestellt sind. Dabei ist ζ als eine Nullstelle gewählt worden. Wie man sieht ist dann auch $P(\overline{\zeta}) = 0$.

$$P(z) = 1.4z^1 + 0.8z^2 + 0.2z^3 + 3.12z^4$$

Man könnte auch sagen, wenn eine Spiegelung eine Multiplikation ist, dann ist sie distributiv. Das bedeutet so viel wie: Ich kann entweder erst alle $a_n \zeta^n$ überlagert malen, und dann spiegeln, oder aber alle gespiegelten $a_n \overline{\zeta}^n$ überlagern und ich bekomme das selbe Ergebnis. Und das nicht nur für die Nullstellen. Somit erhalten wir eine Symmetrie.

1.23 Symmetrie komplexer polynome mit reellen koeffizienten

Definition: Symmetrie komplexer Polynome mit reellen koeffizienten

Jedes Polynome mit reellen koeffizienten ist spiegelsymmetrisch zur reellen Achse.

1.24 Die Nullstellen der geometrischen Reihe

Zum Verständnis komplexer Polynome finde ich die Betrachtung der geometrischen Reihe interessant:

$$P(z) = z^0 + z^1 + z^2 + \ldots + z^N$$

Wo könnten hier wohl die Nullstellen liegen ? Wir wechseln die Perspektive, um uns ein anschauliches Bild machen zu können:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} z^n \Leftrightarrow \tag{76}$$

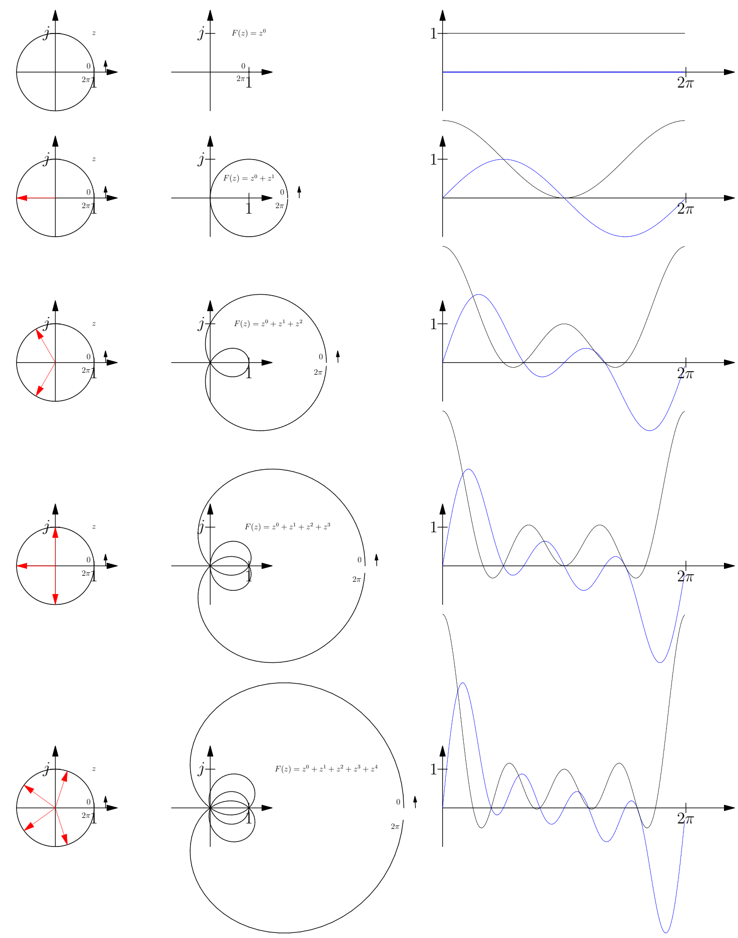
$$P(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{N} r^n cos(n\varphi) + jr^n sin(n\varphi) \tag{77}$$

Damit läßt sich die Aufgabe nach der Nullstellensuche umformulieren in:

$$P(r, \varphi) = 0 \tag{78}$$

$$\sum_{n=0}^{N} r^n cos(n\varphi) = 0 \quad \wedge \quad \sum_{n=0}^{N} r^n sin(n\varphi) = 0 \tag{79}$$

Wir können die Gleichung 77 also als Addition von Zeigern auffassen dessen Argument sich linear erhöht. Wenn wir also bei z^1 das Argument φ haben, dann haben wir bei z^n das Argument $n\varphi$. Da der erste Zeiger z^0 im Koordinatenursprung beginnt, und wir die Bedingung $P(z) = 0$ erfüllen wollen müssen Anfangs und Endpunkte der Zeigersumme gleich sein. Wir haben es also mit einer geschlossene Kurfe zu tuen. Da die Vektoraddition kummutativ ist, die Reihenfolge der Addition der einzelnen Therme das Gesamtergebnis also nicht beeinflusst, genügt die Betrachtung einer einzelnen geschlossenen Kurfe aus allen Permutationen welche sich aus gleichem Argument φ und gleichem Radius r bilden lassen.



Die Exakte Lösung bezüglich der Nullstellen der geometrischen Reihe erhalten wir durch die bereits erläterte Umstellung:

$$(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Wir erhalten:

$$1 - z^{n+1} = 0 \Leftrightarrow$$
$$z^{n+1} = 1 \wedge z \neq 1$$

Alle Nullstellen der geometrischen Reihe erhält man also aus der Kreisteilungsgleichung. Dabei fällt jeweils die 1 als Nullstelle heraus, weil sie ebenfals als Nullstelle des Nenners auftritt. Im Definitionsbereich sind die Nullstellen als rote Pfeile eingezeichnet.

1.25 Die Nullstellen beliebiger Polynome

1.25.1 Abspalten einer Nullstelle

Definition: Abspalten einer Nullstelle, R. Descartes 1637
Ein beliebiges Polynom $P(z)$ der Form

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0$$

mit dem Grad $n \in \mathbb{N}$ kann als Produkt aus einem zweiten Polynom $g(z)$ mit dem Grad $n-1$ und einer Nullstelle z_0 wie folgt geschrieben werden:

$$P(z) = (z - z_0) P_1(z)$$

Mit $a, z, z_0 \in \mathbb{C}$

Wir gehen von der folgenden Gleichung mit $P(z_0) = 0$ aus:

$$\begin{aligned} P(z) = P(z) - P(z_0) &= (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0) \\ &\quad - (a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_2 z_0^2 + a_1 z_0^1 + a_0) \\ &= a_n (z^n - z_0^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - z_0^{n-1}) + \ldots + a_2 (z^2 - z_0^2) + a_1 (z^1 - z_0^1) \end{aligned}$$

(Nebenbei bemerkt reduziert sich die Anzahl der Gewichtungsfaktoren wenn man eine Nullstelle z_0 kennt um eins, nämlich um a_0.)
Wir zeigen nun, dass von jedem Faktor $z^k - z_0^k$ ein Faktor $(z - z_0)$ abgespalten werden kann. Hierfür führen wir die Polynomdivision $\frac{(z^k - z_0^k)}{z - z_0}$ durch und zeigen, das diese immer ohne Rest aufgeht.

$$(z^k \qquad\qquad -z_0^k) : (z - z_0) = z^{(k-1)} + z_0 z^{(k-2)} + \ldots + z_0^{k-2} z + z_0^{k-1} \tag{80}$$
$$-(z^k - z^{k-1} z_0) \tag{81}$$
$$0 + z^{k-1} z_0 \qquad -z_0^k \tag{82}$$
$$-(z^{k-1} z_0 \qquad -z^{k-2} z_0^2) \tag{83}$$
$$0 + z^{k-2} z_0^2 \qquad -z_0^k \tag{84}$$
$$\vdots \tag{85}$$
$$0 + z^{k-(k-2)} z_0^{k-2} \qquad -z_0^k \tag{86}$$
$$-(z^{k-(k-2)} z_0^{k-2} - z^{k-(k-1)} z_0^{k-1}) \tag{87}$$
$$0 + z^{k-(k-1)} z_0^{k-1} \quad -z_0^k \tag{88}$$
$$0 + z^{k-(k-1)} z_0^{k-1} \quad -z_0^k \tag{89}$$
$$0 \tag{90}$$
$$\tag{91}$$

Demnach gilt:

$$\begin{aligned} (z^k - z_0^k) &= (z - z_0)(z^{(k-1)} + z_0 z^{(k-2)} + z_0^2 z^{(k-3)} + \ldots + z_0^{k-3} x^1 + z_0^{k-2} x + z_0^{k-1}) \\ &= (z - z_0) g_k(z, z_0) \end{aligned}$$

Dabei ist das Polynom $g_k(z, z_0)$ vom Grad $k-1$. Es gilt $k \in \mathbb{N}_+$ und $g_1(z, z_0) = 1$. Für unser Polynom $P(z)$ erhalten wir nun:

$$\begin{aligned} P(z) - P(z_0) &= a_n (z^n - z_0^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - z_0^{n-1}) + \ldots + a_2 (z^2 - z_0^2) + a_1 (z^1 - z_0^1) \\ &= (z - z_0)(a_n g_n(z, z_0) + a_{n-1} g_{n-1}(z, z_0) + a_{n-2} g_{n-2}(z, z_0) + \ldots + a_2 g_2(z, z_0) + a_1) \\ &= (z - z_0) P_1(z, z_0) \end{aligned}$$

Weil die gewichtete Summe aus Polynomen vom Typ $g_n(z, z_0)$ höchstens vom Grad $n - 1$ ist, haben wir die Behauptung aus der Definition beweisen. **Man erinnere sich bitte an diesen Beweis im Zusammenhang mit dem Cauchy-Integralsatz.**
Ein weiterer interessanter Aspekt ist dass sich hierraus unmittelbar der fundamentalsatz der Algebra ergibt:

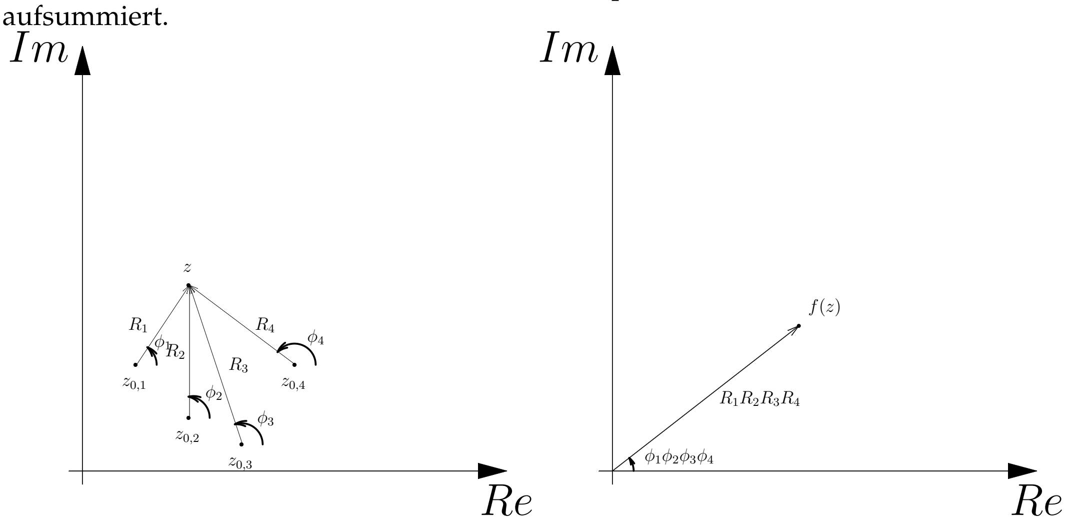
Definition: Fundamentalsatz der Algebra
Über dem Körper der komplexen Zahlen kann man jedes Polynom n-Ten grades als ein Produkt aus n Linearfaktoren der From $(z - z_{0,k})$ schreiben. Dabei ist $z_{0,k}$ die k-te Nullstelle des Polynoms. (Linearfaktorzerlegung)

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_{0,k}) \tag{92}$$

Diese Schreibweise lässt eine weitere geometrische Inerprätation zu:

$$P(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_{0,k}) = R_1 R_2 \dots R_n e^{j(\phi_1+\phi_2+\dots+\phi_n)} \tag{93}$$

Man kann also das Polynom $P(z)$ an der Stelle z auswerten, in dem man alle Abstände zwischen den Nullstellen und dem Punkt z miteinander multipliziert, und alle Winkel aus den Vektoren $z - z_{0,k}$ aufsummiert.

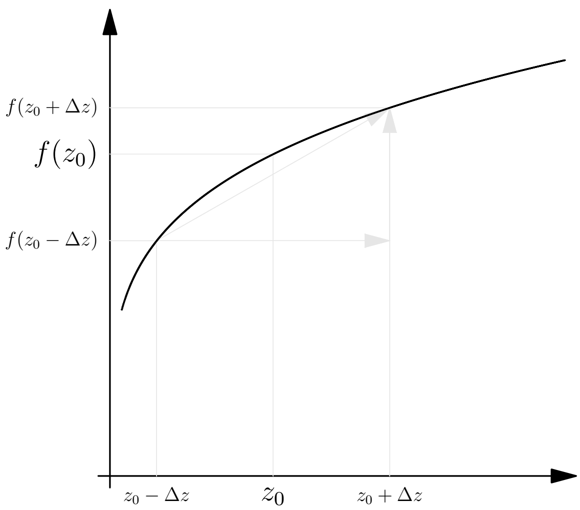


1.26 Differenzieren

Beim Differenzieren sucht man nach der Änderungsrate oder der Tangente einer Funktion f in einem Punkt z_0. Um diese Tangente fehlerlos zu berechnen, schaut man sich zunächst eine Näherung an die Tangente im Punkt z_0 an. Diese Näherung ist die Sekante und führt auf dem direkten Weg zu den finiten Differenzen.

Definition: Die zentrierte finite Differenz
Die zentrierte finite Differenz einer Funktion f im Punkt z_0 ist gegeben durch:

$$f'(z_0) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0 - \Delta z)}{2\Delta z} \tag{94}$$



Als Beispiel nehmen wir die Funktion $f(z) = az^n$ und wir berechnen die Ableitung an einer beliebigen stelle z_0. Wir erhalten:

$$f'(z_0) = \frac{a\,(z_0 + \Delta z)^n - a\,(z_0 - \Delta z)^n}{2\Delta z} \tag{95}$$

Nach dem binomschen Lehrsatz erhalten wir:

$$f'(z_0) = \tag{96}$$

$$\frac{a\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (\Delta z)^k\right) - a\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^{n-k} (-\Delta z)^k\right)}{2\Delta z} \tag{97}$$

Wenn wir die Summe ausschreiben, so sehen wir dass sich alle Terme mit geradem k aufheben.

$$f'(z_0) = \frac{a\{z_0^n\left((\Delta z)^0 - (-\Delta z)^0\right) + \binom{n}{1} z_0^{n-1}\left((\Delta z)^1 - (-\Delta z)^1\right) + \binom{n}{2} z_0^{n-2}\left((\Delta z)^2 - (-\Delta z)^2\right) + \ldots\}}{2\Delta z} \tag{98}$$

Durch Weglassen aller Nullglieder erhalten wir:

$$f'(z_0) = \frac{2a\{\binom{n}{1} z_0^{n-1}(\Delta z) + \binom{n}{3} z_0^{n-3}(\Delta z)^3 + \binom{n}{5} z_0^{n-5}(\Delta z)^5 + \ldots\}}{2\Delta z} \tag{99}$$

Und durch Kürzen ergibt sich:

$$f'(z_0) = a\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} z_0^{n-1} + \left\{ a\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} z_0^{n-3}(\Delta z)^2 + a\begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix} z_0^{n-5}(\Delta z)^4 + \ldots \right\} \Leftrightarrow \tag{100}$$

$$f'(z_0) = a\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} z_0^{n-1} + O(n, (\Delta z)^2) \Leftrightarrow \tag{101}$$

$$f'(z_0) = anz_0^{n-1} + O(n, (\Delta z)^2) \tag{102}$$

Wie wir sehen erhalten wir eine quadratische Fehlerfunktion $O(n, (\Delta z)^2)$. Es gilt für ein fests n:

$$\lim_{\Delta z \to 0} O(n, (\Delta z)^2) = 0 \tag{103}$$

Natürlich lassen sich auch höhere Ableitungen definieren. So kommt man zu Beispiel auf die zweite zentrale finite Differenz durch Einsetzen in 94:

$$f''(z_0) = \frac{f'(z_0+\Delta z) - f'(z_0-\Delta z)}{2\Delta z} = \frac{f(z_0+2\Delta z) - 2f(z_0) + f(z_0-2\Delta z)}{4(\Delta z)^2} \tag{104}$$

Für die n-te Ableitung der Funktion $f(z_0)$ schreiben wir $f^n(z_0)$.

1.27 Differenzieren einer zusammengesetzten Funktion

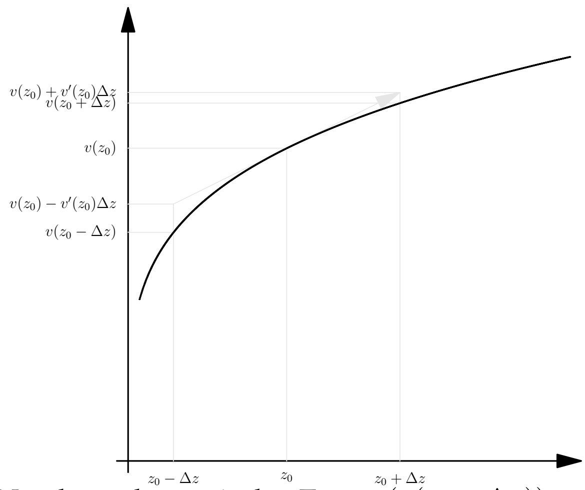
Um die Parametrisierung komplexer Kurvenintegrale zu verstehen ist die Kettenregel sehr nützlich. Und zwar geht es um das Differenzieren einer zusammengesetzten Funktion $f(z) = u(v(z))$. Unter Verwendung von 94 erhalten wir:

$$f'(z_0) = \frac{u(v(z_0+\Delta z)) - u(v(z_0-\Delta z))}{2\Delta z} \tag{105}$$

Zunächst schauen wir uns den Term $v(z_0+\Delta z)$ genauer an. Und zwar kann der Term geschrieben werden als:

$$v(z_0+\Delta z) = v(z_0) + v'(z_0)\Delta z + \left\{\sum_{n=2}^{\infty} v^{(n)}(z_0)(\Delta z)^n\right\} \tag{106}$$

$$v(z_0+\Delta z) = v(z_0) + v'(z_0)\Delta z + O_v(n,\Delta z) \quad mit \quad \lim_{\Delta z\to 0} O_v(n,\Delta z) = 0 \tag{107}$$



Durch die gleiche Vorgehensweise erhalten wir:

$$v(z_0-\Delta z) = v(z_0) - v'(z_0)\Delta z + O_v(n,-\Delta z) \tag{108}$$

$$mit \quad \lim_{\Delta z\to 0} O_v(n,-\Delta z) = 0 \tag{109}$$

Wie man sieht kann man den Wert an der Stelle $v(z_0-\Delta z)$ durch eine Summe ausdrücken. Dabei brechen wir nach der linearen Näherung ab und fassen den Rest in dem Fehlerterm $O_v(n,\pm\Delta z)$ zusammen.

Nun betrachten wir den Term $u(v(z_0+\Delta z))$:

$$u(v(z_0+\Delta z)) = u\left(v(z_0) + v'(z_0)\Delta z + \left\{\sum_{n=2}^{\infty} v^{(n)}(z_0)(\Delta z)^n\right\}\right) \tag{110}$$

Wir substituieren die Terme:

$$v'(z_0)\Delta z + \left\{\sum_{n=2}^{\infty} v^{(n)}(z_0)(\Delta z)^n\right\} = \Delta z_{2+} \tag{111}$$

$$v'(z_0)\Delta z - \left\{\sum_{n=2}^{\infty} v^{(n)}(z_0)(-\Delta z)^n\right\} = \Delta z_{2-} \tag{112}$$

Wir erhalten:

$$u(v(z_0+\Delta z)) = u\left(v(z_0) + \Delta z_{2+}\right) \tag{113}$$

$$u(v(z_0-\Delta z)) = u\left(v(z_0) - \Delta z_{2-}\right) \tag{114}$$

Das können wir nun wieder als Summe schreiben:

$$u(v(z_0+\Delta z)) = u\left(v(z_0)+\Delta z_{2+}\right) = u(v(z_0)) + u'(v(z_0))\Delta z_{2+} + \left\{\sum_{n=2}^{\infty} u^{(n)}\left(v(z_0)\right)\left(\Delta z_{2+}\right)^n\right\} \quad (115)$$

$$u(v(z_0-\Delta z)) = u\left(v(z_0)-\Delta z_{2-}\right) = u(v(z_0)) - u'(v(z_0))\Delta z_{2-} + \left\{\sum_{n=2}^{\infty} u^{(n)}\left(v(z_0)\right)\left(-\Delta z_{2-}\right)^n\right\} \quad (116)$$

Durch Resubstitution erhalten wir:

$$u(v(z_0+\Delta z)) = u(v(z_0)) + u'(v(z_0))v'(z_0)\Delta z + \quad (117)$$

$$u'(v(z_0))\left\{\sum_{n=2}^{\infty} v^{(n)}(z_0)(\Delta z)^n\right\} + \left\{\sum_{n=2}^{\infty} u^{(n)}\left(v(z_0)\right)\left(v'(z_0)\Delta z + \left\{\sum_{n=2}^{\infty} v^{(n)}(z_0)(\Delta z)^n\right\}\right)^n\right\} \quad (118)$$

$$u(v(z_0-\Delta z)) = u(v(z_0)) - u'(v(z_0))v'(z_0)\Delta z + \quad (119)$$

$$u'(v(z_0))\left\{\sum_{n=2}^{\infty} v^{(n)}(z_0)(-\Delta z)^n\right\} + \left\{\sum_{n=2}^{\infty} u^{(n)}\left(v(z_0)\right)\left(-v'(z_0)\Delta z + \left\{\sum_{n=2}^{\infty} v^{(n)}(z_0)(-\Delta z)^n\right\}\right)^n\right\} \quad (120)$$

Damit erhalten wir dir Formel für die verkettete Ableitung wobei wir die Fehlerterme zusammengefasst haben:

$$f'(z_0) = \frac{u(v(z_0+\Delta z)) - u(v(z_0-\Delta z))}{2\Delta z} = u'(v(z_0))v'(z_0) + O(\Delta z) \quad (121)$$

Auch hier gilt für den Fehlerterm $\lim_{\Delta z\to 0} O(\Delta z) = 0$.

Definition: Differenzieren verketteter Funktionen
Eine verkettete Funktion der Form $f(z) = u(v(z))$ kann nach der Regel:

$$f'(z_0) = u'(v(z_0))v'(z_0) \quad (122)$$

abgeleitet werden.

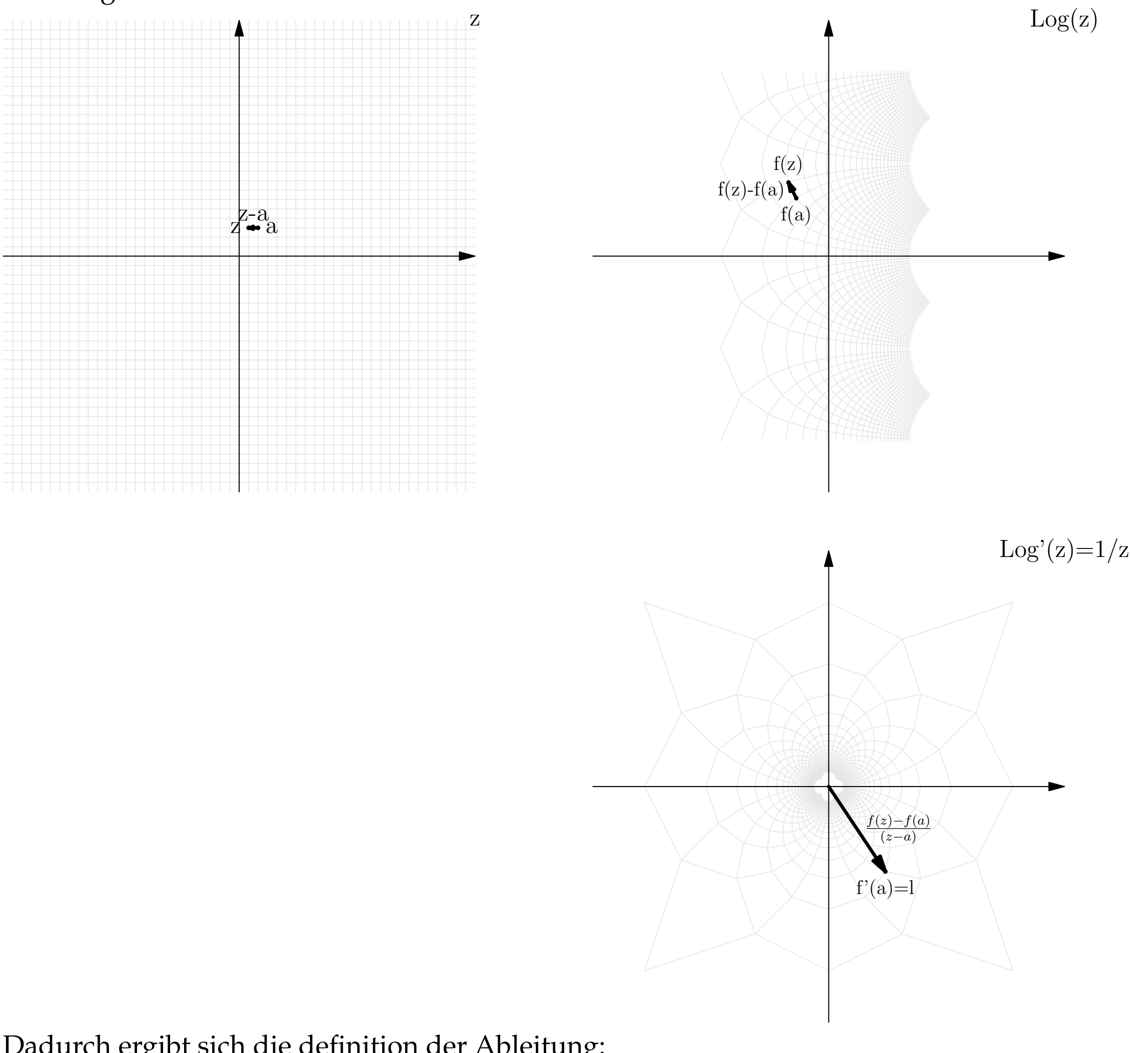
1.28 Komplexe Differenzierbarkeit

Im komplexen ist die Ableitung einer Funktion äquivalent zur Ableitung im Reellen definiert. Es geht darum für einen diskreten Punkt $a \in \mathbb{C}$ eine Zahl $l \in \mathbb{C}$ zu finden, so dass gilt:

$$f(z) = f(a) + l(z - a) + r(z) \tag{123}$$

$$lim_{z \to a} \frac{r(z)}{|z - a|} = 0 \tag{124}$$

Dann gilt: $l = f'(a)$. Besonders wichtig ist, dass für jeden Punkt im Definitionsbereich der Funktion (hier am Beispiel a) nur genau eine Zahl l existiert, und dass $l \in \mathbb{C}$ gilt. Aus diesem Grund schreibt man auch $l(a)$. Der Rest $r(z)$ geht streng monoton gegen 0 für die Annäherung aus einer beliebigen Richtung an a



Dadurch ergibt sich die definition der Ableitung:

Definition: Komplexe Differenzierbarkeit
Eine komplexe Funktion heißt ableitbar in a wenn der Grenzwert:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \qquad z, a \in \mathbb{C}$$

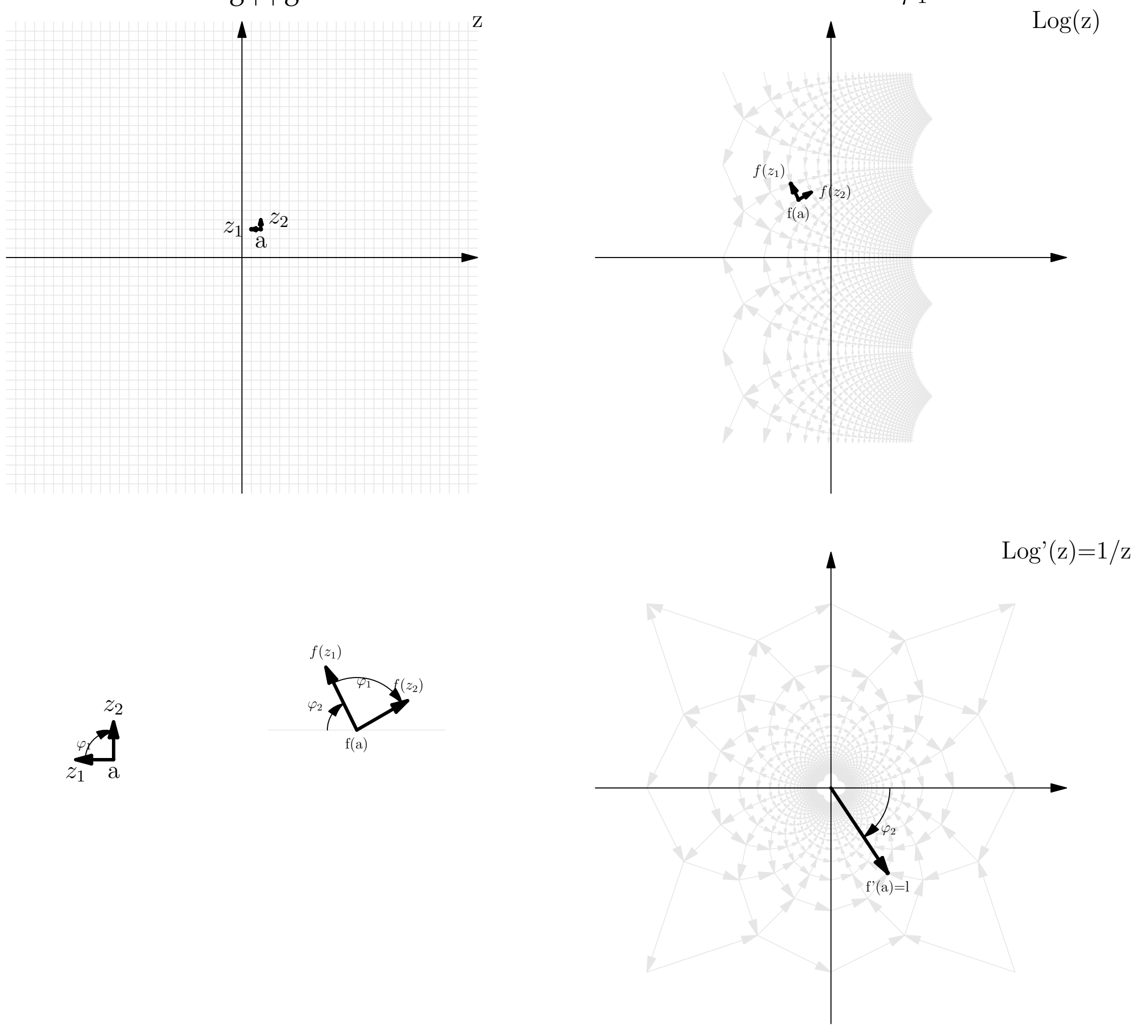
existiert und eindeutig ist.

Weil die Ableitung einer Funktion in einem Punkt a genau eine komplexe Zahl $l = f'(a)$ ist, ist die

änderung in einer komplex differenzierbaren Funktion in einem Punkt a immer durch eine Drehstreckung gegeben.
Wie kann man sich das vorstellen ? Wenn man von dem Punkt a ein kleines Stück in eine beliebige Richtung geht, dann erhält man unter bedingten Umständen einen Punkt $f(z)$. Der Quotient aus den Vektoren $f(z) - f(a)$ und $z - a$ ist dann genau die Ableitung in diesem Punkt weil gilt:

$$f(z) = f(a) + \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}(z - a)$$

Weil bei einer komplex differenzierbaren Funktion die Ableitung in einem Punkt a eine konstante komplexe Zahl l ist, sind Abbildungen durch komplex differenzierbare Funktionen auf Tangentenebene winkelerhaltend. Das bedeutet, dass wenn wir von der Zahl a zwei senkrecht aufeinanderstehende Vektoren zu den Punkten z_1 und z_2 zeichnen, mit $lim_{z_1,z_2 \to a}$ (tangentialabblidungen aus zwei Richtungen), dann sind die eingeschlossenen Winkel der beiden Vektoren im Definitionsbereich und in abgebildetenbereich äquivalent.
Das liegt daran, weil die beiden Vektoren $z_1 - a$ und $z_2 - a$ beide um den Winkel $Arg(l) = \varphi_2$ gedreht, und um den Betrag $|l|$ gestreckt werden. Damit bleibt der innere Winkel φ_1 erhalten.



Wir stellen uns vor, ein Teilchen würde sich durch den Raum bewegen. Es wäre im Punkt a und würde sich pro Zeitschritt $z - a$ bewegen. Wenn wir dann das Feld $log(z)$ für einen winzigen Bruchteil anschalten, dann würde das Teilchen um $|f'(a)|$ beschleunigt werden, und eine Richtungsänderung um $arg(f'(a))$ vollziehen.

1.29 ℂ-Linearität

Betrachtet man Gleichung 123 so stellt man fest, das es sich um eine lineare Gleichung der Form:

$$f(x) = mx + b$$

für ein konstantes a handelt. Mit $b = f(a)$, dem Proportionalitätsfaktor $m = l$ und der freien Variablen $x = z - a$. Dadurch, dass es sich bei dem Proportinalitätsfaktor $m \in \mathbb{C}$ um eine komplexe Zahl handelt nennt man Gleichungen der Form 123 **$\mathbb{C}$-linear**. Den Rest $r(z)$ haben wir vernachlässigt, da er bei genügend kleiner diskretisierung gegen null geht.

1.30 Ableiten in $\mathbb{R}^n$

Ganz allgemein kann man eine n-dimensionale Abblidung in $\mathbb{R}^n$ definieren als:

$$A : \mathbb{R}^{n \times n} \qquad und \quad a, z, r : \mathbb{R}^n \tag{125}$$
$$f(z) = f(a) + A(z - a) + r(z) \tag{126}$$
$$lim_{z \to a} \frac{r(z)}{|z - a|} = 0 \tag{127}$$

Hierfür schauen wir uns znächst die partiellen ableitungen an.
Gegeben ist eine Funktioin $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n, offen$. Wird bis auf die Veränderliche z_j jedes z_n mit einem Wert a_n fixiert, so erhalten wir eine **partielle** Funktion $f^*(z_j)$ von einer Veränderlichen.

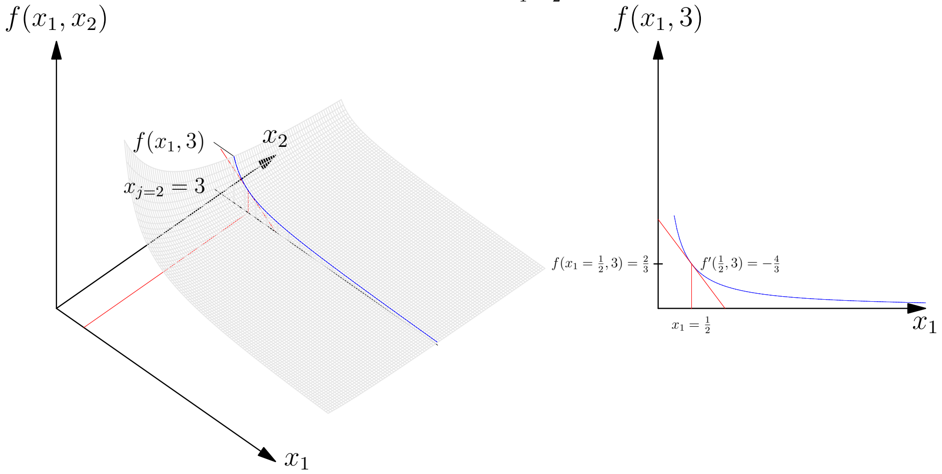
$$f^*(z_j) = f(z_1 = a_1, z_2 = a_2, \dots, z_j, \dots, z_{n-1} = a_{n-1}, z_n = a_n) \tag{128}$$

Definition: Partielle Ableitung
Existiert in dem Punkt $z_j = a_j$ die Ableitung:

$$f^*(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z_j}|_{z_j = a_j} = \frac{f(a)}{\partial z_j} \tag{129}$$

dann ist die Funktion $f(z)$ im Punkt a partiell nach z_j differenzierbar.

Als Beispiel ist die Funktion $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 * x_2}$ gegeben. $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2, offen$



Wir berechnen die Ableitung der partiellen Funktion $f(x_1, 3)$ im Punk $x_1 = \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
f(x_1, 3) &= \frac{1}{3x_1} \\
f(\frac{1}{2}, 3) &= \frac{1}{\frac{1}{2} * 3} = \frac{2}{3} \\
f'(x_1, 3) &= -\frac{1}{3x_1^2} \\
f'(\frac{1}{2}, 3) &= -\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Es ist nun eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n, z := D \subset \mathbb{R}^n, offen$ gegeben durch:

$$
f(z) = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ f_2(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ f_2(z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ \vdots \\ f_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}
$$

Die Funktion $f(z)$ soll im Punkt a differenzierbar sein. Dann ist die Ableitung der Funktion im Punkt a durch die Jakobi oder die Ableitungsmatrix gegeben durch:

Definition: Jakobi oder Ableitungsmatrix
Wenn die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n$ im Punkt a partiell differenzierbar ist, dann ist die Ableitung der Funktion f im Punkt a:

$$
J(f, a) = f'(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial z_n}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial z_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n}(a) \end{bmatrix}
$$

Die Jakobi Matrix heißt auch totales Differential, von f in a oder Tangentialabbildung von f im Punkt a.

Damit haben wir die Matrix A aus Gleichung 126 gefunden und es gilt

$$
A : \mathbb{R}^{n \times n} \qquad und \quad a, z, r : \mathbb{R}^n \tag{130}
$$

$$
f(z) = f(a) + J(f, a)(z - a) + r(z) \tag{131}
$$

$$
lim_{z \to a} \frac{r(z)}{|z - a|} = 0 \tag{132}
$$

Gleichungen in dieser Form nennt man $\mathbb{R}$-**linear**.

1.31 Begrüdung der Funktionentheorie

In der reellen Analysis sind zweidimensionale Abbildungen welche eine Ableitung darstellen bereits definiert. Es fragt sich nun wann eine $\mathbb{R}$-lineare abbildung auch $\mathbb{C}$-linear ist. Also wann genau gilt die folgende Gleichung:

$$Az = lz \qquad A \in \mathbb{R}^2, \qquad l \in \mathbb{C} \tag{133}$$
$$f(z) = f(a) + l(z-a) + r(z) = f(a) + A(z-a) + r(z) \tag{134}$$
$$lim_{z\to a}\frac{r(z)}{|z-a|} = 0 \tag{135}$$

Mit den beiden Variablen $l = \alpha + j\beta$ und $z = x + jy$ erhalten wir:

$$lz = (\alpha + j\beta)(x + jy) \Leftrightarrow \tag{136}$$
$$lz = (x\alpha - y\beta) + j(x\beta + y\alpha) \Leftrightarrow \tag{137}$$
$$lz = u + jv \qquad mit \quad u = x\alpha - y\beta, \quad v = x\beta + y\alpha \tag{138}$$

Nun erzeugen wir eine $\mathbb{R}$-lineare Matrix mit der Basis $1 = (1,0)$ und $j = (0,1)$ welche alle abbildungen darstellt, welche sich auch durch die Multiplikation mit einer komplexen Zahl l darstellen lassen:

$$Az = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\alpha - y\beta \\ x\beta + y\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{139}$$

Da es sich bei unserer gesuchten Matrix A um die Ableitungsmatix handelt, hat sie außer dem die Gestalt der Jakobi matrix in $\mathbb{R}^2$:

$$J(f,a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{bmatrix} \tag{140}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gleichung 139 erhalten wir die notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für eine komplex differenzierbare Funktion:

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \tag{141}$$
$$\beta = -\frac{\partial u}{\partial y}(a) = \frac{\partial v}{\partial x}(a) \tag{142}$$

Definition: Cautchy-Riemannschen Differentialgleichungen
f ist in a komplex ableitbar so gilt:

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \tag{143}$$
$$\beta = -\frac{\partial u}{\partial y}(a) = \frac{\partial v}{\partial x}(a) \tag{144}$$

Wenn die Gleichungen erfüllt sind, so kann die Ableitung der Funktion f gebildet werden Durch:

$$f'(a) = (\alpha + j\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - j\frac{\partial u}{\partial y}(a) \tag{145}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}(a) - j\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}(a) + j\frac{\partial v}{\partial x}(a) \tag{146}$$

Damit f in a komplex differenzierbar ist, muss f in a stetig sein.

Zum Beispiel kann man die Cauchy-Riemman differentialgleichungen an der Funktion $e^z = e^x(cos(y) + jsin(y))$ mit $u(x,y) = e^x cos(y)$ und $v(x,y) = e^x sin(y)$ leicht nachprüfen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x cos(y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x sin(y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x sin(y) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x cos(y)$$

Damit sind die Cauchy Riemannschen differentialgleichungen erfüllt.
Als Gegenbeispiel einer Komplexe Funktion, welche nicht komplex differenzierbar oder $\mathbb{C}$-linear ist die die Funktion $f(z) = \overline{z}$ gegeben mit $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = -y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Wie man sieht ist die Funktion nicht komplex differenzierbar.

Definition: Stetigkeit analytischer Funktionen
Eine Funktion
$f : D \to \mathbb{C}, \qquad D \subset \mathbb{C}, offen$
welche in D komplex differenzierbar ist, heißt auch analytisch, oder holomorph oder regulär in D.
Eine in D Analytische Funktion ist stetig in D weil sie $\mathbb{C}$-linear ist und alle Ihre Ableitungen in D eindeutige komplexe Zahlen aus $\mathbb{C}$ sind. Ableitungen sind immer endliche Zahlen.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ mit $z = x + jy$. Wir erhalten die beiden partiellen Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$:

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$
$$v(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Wir erhalten die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Uns fällt auf, dass eine der Bedingungen $-\frac{\partial u}{\partial y}(a) = \frac{\partial v}{\partial x}(a)$ für die komplexe Differenzierbarkeit erfüllt ist. Unter welchen Bedingungen die zweite erfüllt ist, erhaten wir durch Gleichsetzen der beiden

Terme. Wir fordern also Gleichheit von $\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$:

$$\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2}{x^2+y^2}$$
$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Wie wir sehen, ist trotz unterschiedlicher Formel Gleichheit gegeben. Allerdings ist die Ableitung in $z = (0+j0) = 0$ unstetig. Aus diesem Grund ist die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ im Punkt $z = 0$ nicht analytisch und nicht komplex differenzierbar.

1.32 Potentialfunktionen

In der Elektrostatik gibt es die Menge der Potentialfunktionen. Anschaulich lassen sie sich über die Beziehung:

$$div(grad(u(x,y))) = 0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u$$

herleiten. Aus funktionentheoretischer Sicht soll eine Funktion u gegeben sein:
Gegeben:

$$u : D \to \mathbb{R}, \qquad D \subset \mathbb{C}$$

Die Funktion u soll zweimal komplex differenzierbar sein.
Gesucht:

$$f(z) : D \to \mathbb{C}, \qquad mit \quad Re(f) = u$$

Die Funktion $f(z)$ soll analytisch sein.
Dann folgt aus den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \qquad mit \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{147}$$
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad mit \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{148}$$

Es folgt also aus dem Satz von Schwarz nach dem man die reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen darf ohne das Ergebnis zu verändern:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \Leftrightarrow \tag{149}$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0 \tag{150}$$

Dadurch erhalten wir:

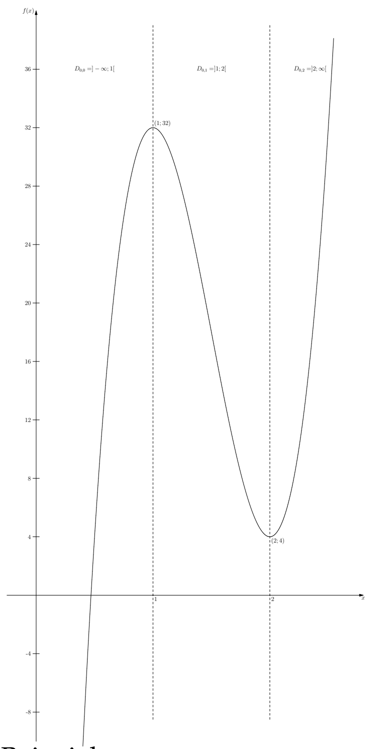
Definition: Potentialfunktion
Für eine analytische Funktion f deren Real und Imaginärteil zweimal partiell ableitbar ist gilt:
$Re(f)$ ist eine Potentialfunktion oder eine harmonische Funktion und $Im(f)$ ist eine Potentialfunktion oder eine harmonische Funktion.

1.33 Satz für implizite Funktionen

Gegeben ist eine analytische Funktion $f(z)$ mit stetiger Ableitung:

$$f(z) : D \to \mathbb{C}, \qquad D \subset \mathbb{C} \tag{151}$$

In einem Punkt $a \in D$ mit $f'(a) \neq 0$ existiert eine offene Menge $D_0 \subset D \quad , a \in D_0$ so dass die Einschränkung $f|D_0$ injektiv ist.



Wir gehen von der Definition der Umkehrfunktion aus:

$$f^{-1}(f(z)) = z = g(z) \qquad mit \quad g(z) = z \tag{152}$$

Wir entwickeln nun wieder in einer Reihe in dem wir die Ableitungen gleich setzen, hören aber nach dem ersten Term auf und erhalten die Ableitung der zusammengesetzten Umkehrfunktion von $f(z)$:

$$\left(f^{-1}(f(z))\right)' = f^{-1'}(f(z))f'(z) = 1 = g(z)' \Leftrightarrow \tag{153}$$

$$f^{-1'}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \tag{154}$$

Gleichungen der Form

$$f^{-1'}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \tag{155}$$

sind besonders Interessant da ihre Stammfunktionen eine zusammengesetzte Logarithmusfunktion ist. Des Weiteren erkannt man, dass $f'(z) \neq 0$ gelten muß, da eine Division durch 0 keinen Sinn ergibt.

Beispiel:
Wir betrachten wieder das Polynom $f(z)$.

$$f(x) = 56z^3 - 252z^2 + 336z - 108$$
$$f'(z) = 168z^2 - 504z + 336 = 168(z-1)(z-2)$$

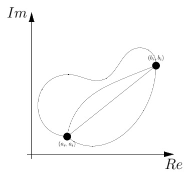
Da $f'(z)$ Nullstellen bei $z = \{1; 2\}$ hat, muss $f(z)$ in den Intervallen
$D_{0,k}: \qquad D_{0,0} =]-\infty; 1[; \quad D_{0,1} =]1; 2[; \quad D_{0,2} =]2; \infty[;$
injektiv sein.
Um die Punkte $z = \{1; 2\}$ gibt es keine offene Umgebung für welche $f(z)$ injektiv ist.
TODO: Mehrfache Nullstellen - Sattelppunkte etc

1.34 Umkehrfunktion einer Potenzreihe

1.35 Integration im komplexen

Das allgemeinste Prinzip zum integrieren im Komplexen ist das sogenannte komplexe Kurvenintegral. Wie im reellen genügt als Vorraussetzung für Integrierbarkeit lediglich die Forderung nach Stetigkeit im betrachteten Integrationsgebiet. Man definiert daher das komplexe Kurvenintegral wie folgt:

Definition: Komplexes Kurvenintegral



Eine komplexe Funktion ist integrierbar, wenn sie auf dem zu integrierenden Intervall stetig ist:

$$\int_{(a_r,a_i)}^{(b_r,b_i)} f(z)dz = \int_{a_r}^{b_r} Ref(z)dz + j\int_{a_r}^{b_r} Imf(z)dz \quad (156)$$

$$+\int_{a_i}^{b_i} Ref(z)dz + j\int_{a_i}^{b_i} Imf(z)dz \quad (157)$$

Der Wert des berechnenten Integrals kann generell vom gewählten integrationspfad abhängen. Da das komplexe Kurvenintegral jedoch durch seine Anfangs und Endpunkte beschrieben ist, ist das komplexe Kurvenintegral keine eindeutige Abbildung und verletzt somit die Definition einer Funktion.

Weil der Wert des Integrals vom gewählten Weg abhängen kann, ist es zunächst sinnvoll das Integral als zusammengesetzte Funktion aus dem Pfad $\varphi(t) \to \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$ und dem komplexen Kurvenintegral zu formulieren. Hierfü verwenden wir die Substitutionsregel. Wir nehmen an dass gilt $F' = f$ und betrachten:

$$\frac{F(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \quad (158)$$

Damit erhalten wir:

Definition: Parametrisiertes Komplexes Wegintegral

Ein komplexes Kurvenintegral über die Kurve $\varphi(t) \to \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$ lässt sich als zusammengesetzte Funktion schreiben.

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (159)$$

Das Integral existiert wenn die komplexe Funktion $f(z)$ auf dem zu integrierenden Gebiet stetig ist.

1.36 Stammfunktionen im komplexen

Im Reellen ist es so, dass ein Integral lediglich von der zu integrierenden Funktion und seinem Anfangs und Endpunkt abhängt. Daraus ergibt sich ein eindeutiger Wert. Deshalb gibt es im Reellen zu jeder integrierbaren Funktion automatisch eine Integralfunktion, die Stammfunktion.
Im Komplexen ist das leider nicht der Fall. Zu einer gegebenen Funktion f und gegebenem Anfangspunkt $z_a \in \mathbb{C}$ und gegebenem Endpunkt $z_b \in \mathbb{C}$ kann es beliebig viele Werte geben, je nach gewähltem Integrationspfad. Da eine Funktion jedoch eine eindeutige abbildung sein muss, gibt es im Komplexen nicht zu jeder integrierbaren Funktion eine Stammfunktion F mit $F'(z) = f(z)$.
Zunächst definieren wir die Stammfunktion:

Definition: Stammfunktionen
Gibt es zu einer Funktion $f \quad : \quad D \to \mathbb{C}; \quad D \in \mathbb{C}$ eine Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$, dann ist die Funktion F die Stammfunktion zu f. Es muss gelten:

$$\int_{\alpha} f(z)dz = F(\alpha(a)) - F(\alpha(b)) \tag{160}$$

Wenn es eine solche Funktion F geben soll, so muss die Funktion f analytisch sein und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Wobei α eine Kurve in $D \in \mathbb{C}$ ist.

Wenn also eine Funktion f eine Stammfunktion besitzt, so muss für geschlossene Integrale $\alpha(a) = \alpha(b)$ gelten:

$$\int_{\alpha} f(z)dz = F(\alpha(a)) - F(\alpha(b)) = 0, mit \quad \alpha(a) = \alpha(b) \tag{161}$$

Man stellt nun schnell fest, dass jedes Polynom eine Stammfunktion besitzt. Daher wollen wir nun gebrochenrationale Funktionen definieren als:

Definition: Gebrochenrationale Funktionen
Eine gebrochenrationale Funktion $G(z)$ ist eine Multiplikation aus einem Zählerpollynom $Z(z)$ mit einer Zusammensetzung aus den Funktionen $f(z) = \frac{1}{z}$ und einem Nennerpolynom $P(z)$.

$$G(z) = Z(z)f(P(z)) \tag{162}$$

Das Produkt und die Zusammensetzung zweier analytischer Funktionen sind analytisch. Da $f(z) = \frac{1}{z}$ überall außer im Nullpunkt analytisch ist, sind die Polstellen die einzigen nicht analytischen Bereiche gebrochen rationaler Funktionen. Es folgt, dass jedes Geschlossene Integral welches keinen Pol umschließt verschwindet.

Definition: Stammfunktion Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

Wenn es zu einer Funktion f eine Stammfunktion F geben soll, so muss die Funktion f in ihrem Definitionsbereich analytisch sein und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen.

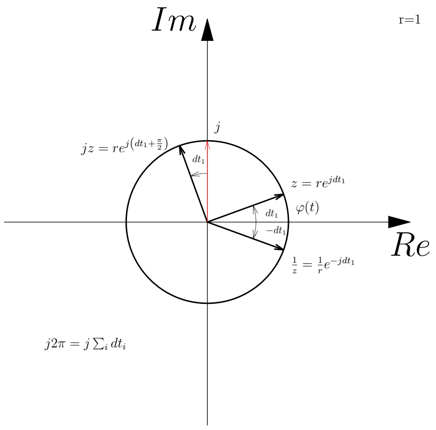
So hat zum Beispiel die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ in einer kreisscheibe mit Mittelpunkt 0 keine Stramfunktion.

1.37 Integration der Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$

Wir wollen die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ integrieren. Der Integraiontpfad soll ein Kreis sein $\varphi(t) = re^{jt}, t \in [0, 2\pi]$. Rein formal erhatlen wir:

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(2\pi)} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varphi(t)} \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{jt}} jre^{jt} dt = \int_0^{2\pi} j dt = j2\pi \tag{163}$$

Schauen wir uns die Gleichung 163 an, so lässt diese eine geometrische Interprätation zu.



Aus 163 können wir direkt zwei Dinge ablesen. Erstens ist der Radius r des Integrationspfades nicht relevant, da er sich kürzen lässt, und zweitens entspricht der Wert des Integrals wohl genau $j2\pi$. Da der Raidus nicht relevant ist, wählen wir zur Vereinfachung der Zeichnung $r = 1$.
Der Term $\frac{1}{re^{jt}}$ lässt sich nun schreiben als e^{-jt}. Der Term jre^{jt} kann umgeschrieben werden in $e^{j\frac{\pi}{2}} e^{jt} = e^{j\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}$. Die Multiplikation der beiden Terme ergibt dann genau den rote eingezeichneten Vektor j. Da wir beim intergrieren eine Summe über infinitesimal kleine Stücke bilden, betrachten wir in unserem Bild eines dieser infinitesimal kleinen Stücke dt_1. Der Wert des Intgrals ergibt sich dann aus $\sum_i jdt_i$. Diese Summe entspricht bei unendlich feiner Diskretisierung genau der Länge des Einheitskreises.

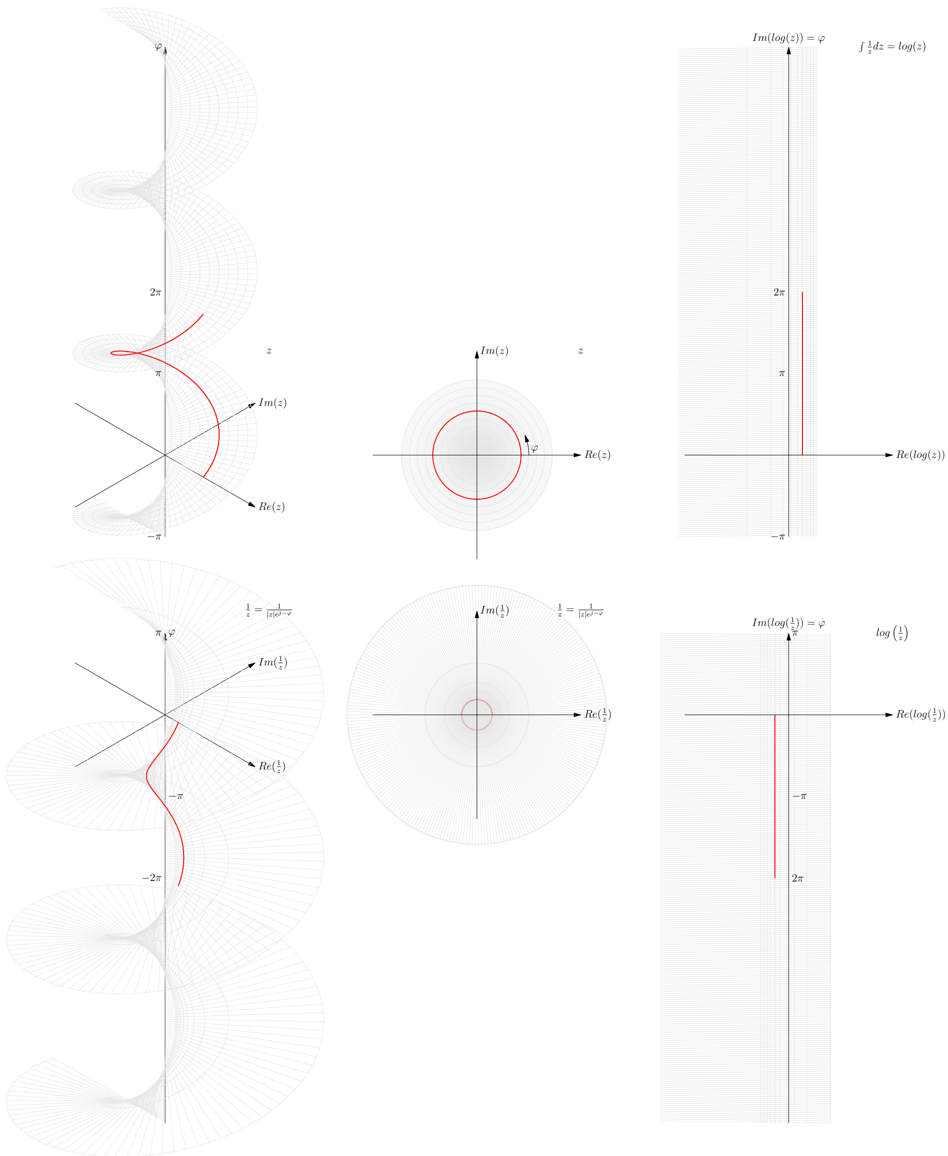
1.38 Rechnen mit Logarithmen

Das rechnen mit Logarithmen scheint zunächst wiedersprüchlich. Zum Beispiel gilt:

$$\oint_\alpha \frac{1}{z} = log(re^{j\varphi})|_0^{2\pi} = log(r) + i\varphi|_0^{2\pi} = (log(r) + j2\pi) - (log(r) + j0) = j2\pi \quad (164)$$

$$\neq log(re^{j\varphi})|_0^{2\pi} = log(re^{j2\pi}) - log(re^{j0}) = log(1) - log(1) = 0 \quad (165)$$

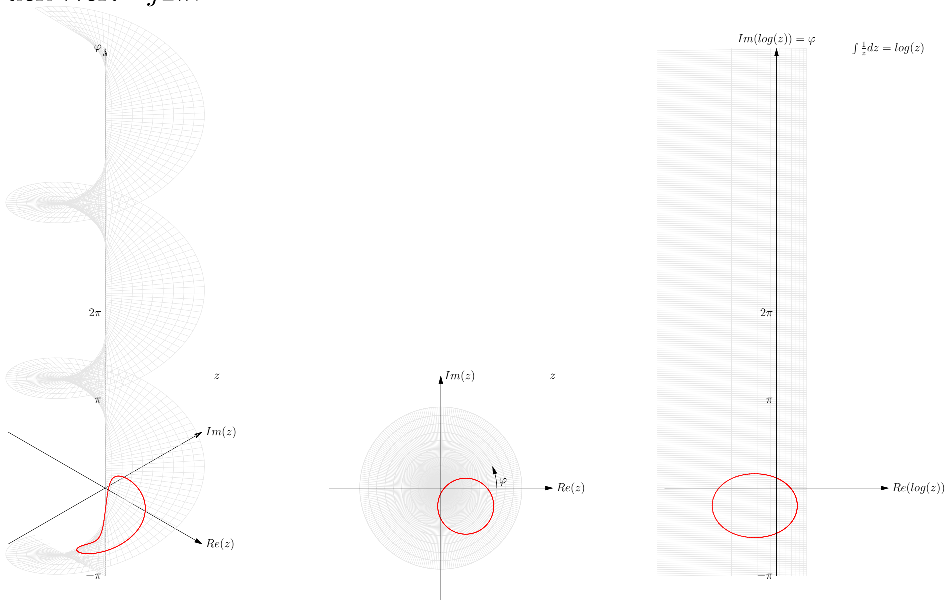
Wenn man über eine Kreisscheibe $z_0 + |r|e^{j\varphi}$ mit $r > z_0$ und $\varphi \in 0..2\pi$ integriert. Der Nullpunkt des Nennerpolynoms oder die Polstelle der Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ liegt also im Inneren des Kreises über welchen integriert wird.



Wir betrachten die beiden Funktionen $z = f(\varphi) = re^{j\varphi} \quad \varphi \in -\pi \ldots 5\pi$ wobei wir nun Zusätzlich den bereits zurückgelegten Winkel φ in der dritten Raumdimension auftragen und die Funktion $w = f(z) = Log(z)$. Wir sehen, dass wir in umserem Fall 2.5 überlagerte komplexe Ebenen erhalten, die riemannschen Blätter. Diese riemannschen Blätter stellen nun den Definitionsbereich für den komplexe Logarithmus dar.

Nun zeichnen wir einen Pfad von $\varphi = 0$ beginnend bis $\varphi = 2\pi$ im Definitionsbereich. Da der Logarithmus im Hauptzweig von $]-\pi \ldots \pi[$ definiert ist, verlassen wir den Hauptzweig des Logarithmus. Da wir den Definitionsbereich der Logarithmusfunktion verlassen ist streng genommen die

Schreibweise $\oint_\alpha \frac{1}{z} = log(re^{j\varphi})|_0^{2\pi}$ auf Grund des gewählten Integrationspfades nicht korrekt. Im Definitionsbereich überqureren wir in positiver mathematischer Richtung die negative reelle Achse. Beim überqueren der negativen reellen Achse in positiver mathematischer Umlaufrichtung (vergleiche Stetigkeit der Logarithmusfunktion) wechseln wir in das darüber liegende riemannsche Blatt. Da gilt $log(re^{j\varphi}) = log(r) + j\varphi$ erhalten wir also für den Term $log(re^{j\varphi})|_0^{2\pi}$ den Wert $j2\pi$.
Wenn wir das Selbe für die Funktion $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-j\varphi}$ machen, überqueren wir auf Grund des negativen Vorzeichens des Arguments die negative reelle Achse in negativer mathematischer Umlaufrichtung. Aus diesem Grund wechseln wir in das darunterliegende riemannsche Blatt. Als Ergebnis erhalten wir den Wert $-j2\pi$.



Nun wählen wir einen anderen Integrationspfad $z_0 + |r|e^{j\varphi}$ mit $r < |z_0|$. Es ist leicht festzustellen, dass wir den Nullpunkt nicht umschließen. Weil sich der Integralanfang und das Integralende immer auf dem selben Riemannschen Blatt befinden, werden diese Integrale immer zu Null.

1.38.1 Analytischer Bereich einer zusammengesetzten Funktion

Gegeben ist die zusammengesetzte Funktion $f(z) = Log(z^5 + 1)$. Gesucht ist die Menge $D \subset \mathbb{C}$ in welcher $f(z)$ analytisch ist.

1.39 Cauchy'sche Integralformel

Für die Herleitung der Cauchy'schen Integralformel benötigen wir zunächst ein paar triviale Sätze.

Definition: Stammfunktionen
Gibt es zu einer Funktion $f : D \to \mathbb{C};\ D \in \mathbb{C}$ eine Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$, dann ist die Funktion F die Stammfunktion zu f. Es muss gelten:

$$\int_\alpha f(z)dz = F(\alpha(a)) - F(\alpha(b)) \tag{166}$$

Wenn es eine solche Funktion F geben soll, so muss die Funktion f analytisch sein und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen. Wobei α eine Kurve in $D \in \mathbb{C}$ ist deren Fläche ganz in D enthalten ist.

Wenn also eine Funktion f eine Stammfunktion F besitzt, so muss für geschlossene Integrale ($\alpha(a) = \alpha(b)$) nach 166 gelten:

$$\oint_\alpha f(z)dz = F(\alpha(a)) - F(\alpha(b)) = 0 \qquad \alpha(a) = \alpha(b) \tag{167}$$

Ins Besondere besitzt jedes Polynom eine Stammfunktion.

$$\oint_\alpha f(z)dz = \oint_\alpha \sum_{n=0}^{N} a_n z^n = 0 \tag{168}$$

Mit diesen Sätzen betrachten wir nun den folgenden Term:

$$\oint_\alpha \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \tag{169}$$

Dabei soll der Punkt z im Innern von α liegen.
Sei nun zunächst die Funktion f auf ein Polynom beschränkt, dann gilt:

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n \zeta^n - \sum_{n=0}^{N} a_n z^n}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n(\zeta^n - z^n)}{\zeta - z} \tag{170}$$

Wenn wir eine Polynomdivision des Terms $\frac{a_n(\zeta^n - z^n)}{\zeta - z}$ wie in 91 durchführen, so geht diese immer (für jedes n) ohne Rest auf. Damit erhalten wir wieder ein Polynom, da sich der Nenner in den einzelnen Summanden kürzen lässt. Da Polynome immer eine Stammfunktion besitzen muss auch der Term $\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n(\zeta^n - z^n)}{\zeta - z}$ eine Stammfunktion besitzen. Da geschlossene Integrale über Funktionen mit Stammfunktionen immer Null sein müssen gilt:

$$\oint_\alpha \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \tag{171}$$

Dieser Ausdruck beinhaltet die Kerneigenschaften der Cauchy'schen Integralformel. Wir formen um:

$$\oint_\alpha \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \Leftrightarrow \tag{172}$$

$$\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_\alpha \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta \Leftrightarrow \tag{173}$$

$$\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \oint_\alpha \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \Leftrightarrow \tag{174}$$

$$\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi j f(z) \tag{175}$$

Sein nun die Funktion f von der From:

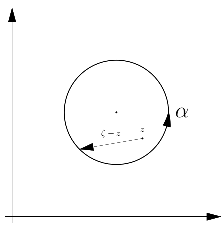
$$f(z) = \frac{1}{P(z)} \tag{176}$$

wobei $P(z)$ ein Polynom ist. Damit $\frac{1}{P(z)}$ im Definitionsbereich analytisch ist, werden Pole aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen. Dann gilt:

$$\frac{\frac{1}{P(\zeta)} - \frac{1}{P(z)}}{\zeta - z} = \frac{P(\zeta) - P(z)}{\zeta - z} \frac{(-1)}{P(\zeta)P(z)} \tag{177}$$

Da das Produkt $P(\zeta)P(z)$ im Definitionsbereich analytisch bleibt und auch hier der Term $\frac{P(\zeta) - P(z)}{\zeta - z}$ einfach gerkürtzt werden kann, bleibt die Argumentation gleich wie beim entwickeln eines Polynoms nach Gleichung 170 ff. Es entsteht also kein neuer Pol an dieser Stelle und somit verschwindet auch hier das Kreisintegral. Damit erhalten wir den Integralsatz von Cauchy für gebrochenrationale Funktionen:

Definition: Cauchy'sche Integralformel, A.-L. Cauchy, 1831



Wenn eine Funktion $f \quad : \quad D \to \mathbb{C}; \quad D \in \mathbb{C}$ in ihrem Definitionsbereich analytisch ist, dann gilt für jede Kurve α deren Fläche ganz im Innern des Definitionsbereiches liegt :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \qquad (178)$$

Wobei z wegen $\oint_\alpha \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi j$ im Innern von α liegen muss.

Ein Spezialfall ergibt sich aus Gleichung 170 wenn wir uns anschauen, was bei der Annäherung des Nenners an die Null passiert . Betrachten wir nämlich den Gernzübergang:

$$\lim_{z \to \zeta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(z) \qquad (179)$$

so erhalten wir die Ableitung der Funktion. Gegeben sei zum Beispiel die Funktion:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$$

Auf diese Funktion wenden wir 179 an und machen für jeden Term eine Polynomdivision:

$$f'(z) = \lim_{z \to \zeta} \frac{a_1(\zeta - z) + a_2(\zeta^2 - z^2) + a_3(\zeta^3 - z^3)}{\zeta - z}$$
$$f'(z) = \lim_{z \to \zeta} a_1 + a_2(\zeta + z) + a_3(\zeta^2 + \zeta z + z^2)$$
$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2$$

Wie man sieht behält der Cauchy'sche Integralsatz seine Gültigkeit.

1.39.0.1 Anwendung der Cauchy'schen Integralformel

Mit dem Cauchy'schen Integralsatz lassen sich Integrale echtgebrochener Funktionen berechnen.

$$f(z) = \oint_\alpha \frac{z^3}{(z-1)(z+1)}$$

Dabei sollen beide Nulltellen $z_{0,1} = 1$ und $z_{0,2} = -1$ im Innern von α liegen. Wir können nun zwei weitere Funktionen definieren:

$$g_1(z) = \frac{z^3}{(z+1)}$$
$$g_2(z) = \frac{z^3}{(z-1)}$$

Es gilt nun wenn die Kurve α_1 lediglich die Nullstelle 1 umschliesst, und die Kurve α_2 lediglich die Nullstelle -1 umschliesst:

$$\oint_\alpha f(z) dz = \oint_{\alpha_1} \frac{g_1(z)}{(z-1)} dz + \oint_{\alpha_2} \frac{g_2(z)}{(z-(-1))} dz$$

Man beachte dass $g_1(z)$ und $g_2(z)$ auf den Gebieten auf welchen sie integriert werden analytisch sind da ja die beiden Integrationspfade die beiden Pole von jeweils g_1 und g_2 nicht umschlingen. Die beiden Integrale können wir nun mit dem Cauchy'schen Integralsatz auswerten:

$$\oint_{\alpha_1} \frac{g_1(z)}{(z-1)} dz = 2\pi j g_1(1) = \frac{2\pi j}{2}$$
$$\oint_{\alpha_2} \frac{g_2(z)}{(z-(-1))} dz = 2\pi j g_2(-1) = \frac{2\pi j}{2}$$

Wir erhalten:

$$\oint_{\alpha} f(z) dz = 2\pi j$$

1.40 Verallgemeinerung der Cauchy'schen Integralformel

Die Integralformel von Cauchy lässt sich verallgemeinern. Leiten wir 178 ab, so erhalten wir:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\alpha} f(\zeta)(\zeta - z)^{-1} d\zeta$$
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\alpha} (-1) f(\zeta)(\zeta - z)^{-2}(-1) d\zeta$$
$$f''(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\alpha} (-1)(-2) f(\zeta)(\zeta - z)^{-3}(-1)(-1) d\zeta$$
$$f'''(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\alpha} (-1)(-2)(-3) f(\zeta)(\zeta - z)^{-4}(-1)(-1)(-1) d\zeta$$

Definition: Cauchy'sche Integralformel Allgemein
Wenn eine Funktion $f \quad : \quad D \to \mathbb{C}; \quad D \in \mathbb{C}$ in ihrem Definitionsbereich analytisch ist, dann gilt für jede Kurve α welche im Innern des Definitionsbereiches liegt:

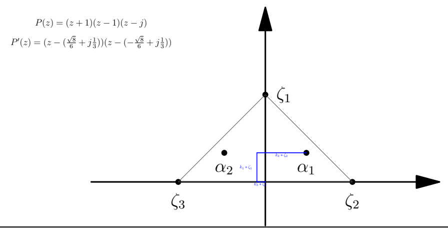
$$\frac{n!}{2\pi j} \oint_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = f^n(z) \tag{180}$$

Dabei ist $f^n(z)$ die n-te Ableitung der Funktion $f(z)$

1.41 Satz von Gauß-Lucas

Definition: Satz von Gauß-Lucas C.F.Gauss, 1816; F.Lucas, 1879
Ein komplexes Polynom $P(z)$ mit dem Grad n hat die Nullstellen $\zeta_1 \dots \zeta_n$. Die Nullstellen von $P'(z)$ liegen dann in oder auf der konvexen Hülle welche die Nullstellenmenge von $P(z)$ aufspannt. Zu jeder Nullstelle α von $P'(z)$ gibt es n reelle Zahlen $0 \leq \kappa_1, \dots, \kappa_n$ mit den Eigenschaften:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \kappa_\nu = 1; \quad und \quad \alpha = \sum_{\nu=1}^{n} \kappa_\nu \zeta_\nu \tag{181}$$



Man kann sich die n Nullstellen ζ als neues Koordinatensystem vorstellen. Die n Gewichte κ müssen in Summe 1 ergeben. Deshalb müssen die Nullstellen von $P'(z)$ in oder auf der Konvexen hülle der Nullstellenmenge von $P(z)$ liegen.

Gegeben sei das Polynom $P(z)$:

$$P(z) = C \prod_i (z - \zeta_i) \tag{182}$$

Die Ableitung ergibt sich dann nach der Produktregel:

$$P'(z) = C \sum_j^n \left\{ \prod_{i \neq j}^n (z - \zeta_i) \right\} \tag{183}$$

Nun schauen wir uns den Quotienten an und gehen davon aus, dass $P'(z)$ und $P(z)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\overline{z - \zeta_\nu}}{|z - \zeta_\nu|^2} \tag{184}$$

Da die Nullstellen des Nenners die Nullstellen des Polynoms sind können wir für den Term fordern:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\overline{z - \zeta_\nu}}{|z - \zeta_\nu|^2} = 0 \Leftrightarrow \tag{185}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{z}{|z - \zeta_\nu|^2} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\zeta_\nu}{|z - \zeta_\nu|^2} \Leftrightarrow \tag{186}$$

$$z = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\zeta_\nu}{|z-\zeta_\nu|^2}}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|z-\zeta_\nu|^2}} \tag{187}$$

Die n reellen Zahlen κ_ν sind dann:

$$\kappa_\nu = \frac{\frac{1}{|z-\zeta_\nu|^2}}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|z-\zeta_\nu|^2}} \tag{188}$$

1.42 Satz zur Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung ist ein wichtiges mathematisches Werkzeug sowohl zum integrieren als auch zum zerlegen mathematischer Funktionen in einzelne standardisierte Blöcke.
Ansatz - beweis ausstehend
Gegeben ist die folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)(x-4)} = \frac{Z(x)}{N(x)} \tag{189}$$

Wir versuchen nun die erste Polstelle durch einen additiven Term mit der selben Polstelle zu ersetzen und ziehen deshalb den Term $\frac{a}{(x-1)}$ von der Funktion ab. Dabei wählen wir den Parameter a so, dass der Zäher $Z(x)$ an der Stelle $x = 1$ eine hebbare Singularität erzeugt:

$$f_2(x) = f(x) - \frac{a}{x-1} = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)(x-4)} - \frac{a}{x-1} = \frac{(x+5) - a(x+1)(x-4)}{(x-1)(x+1)(x-4)} = \frac{Z_2(x)}{N_2(x)} \tag{190}$$

Zur Erzeugung der hebbaren Singularität fordern wir nun eine Nullstelle and der Stelle $x = 1$ oder äquivalent dazu $Z_2(1) = 0$

$$Z_2(1) = 0 = (1+5) - a(1+1)(1-4) \Leftrightarrow \tag{191}$$
$$a = -1 \tag{192}$$

Daraus ergibt sich der Zähler durch Einsetzen von $a = -1$

$$Z_2(x) = (x+5) + (x+1)(x-4) = (x+5) + x^2 - 3x - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1) \tag{193}$$

Wir erhalten:

$$f(x) = f_2(x) + \frac{-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-4)} - \frac{1}{x-1} = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)(x-4)} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x-4)} - \frac{1}{x-1} \tag{194}$$

Durch wiederholte Vorgehensweise erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$f(x) = \frac{3}{5}\frac{1}{x-4} + \frac{2}{5}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \tag{195}$$

Für konkrete Berechnungen von Partialbruchzerlegungen gibt es wesentlich einfachere Rechenschemata. Dieser Rechenweg soll lediglich verdeutlichen weshalb eine Partialbruchzerlegung immer möglich ist.

1.43 Potenzreihen

1.44 Der Potenzreihen Entwicklungssatz

1.45 Riemann'scher Hebbarkeitssatz

1.46 Laurentreihen

1.46.1 Fourierreihen

1.47 Komplexe Abbildung

Um komplexe Ableitungen zu verstehen, ist es verständnisfordernd, sich ein Bild von der Funktion zu machen. In unserem Fall bildet eine Fuktion f ein Gebiet G auf $\mathbb{C}$ ab ($f \quad : G \to \mathbb{C}$). Man kann die komplexe Funktion also als Transformation eines zweidinemsionalen Gebietes ansehen. Im Grunde ist das dasselbe, wie im Reellen, nur dass wir keinen Zahlenstrahl haben, sondern ein Gebiet.
Ich beginne mit der einfachen Funktion $w = f(z) = z^2$. Dabei ist $z = x + jy$ und $w = u + jv$.

$$\begin{gathered} w = zz = (x+jy)(x+jy) = (x^2-y^2) + j2xy = u + jv \Leftrightarrow \\ u(x,y) = (x^2-y^2) \wedge v(x,y) = 2xy \end{gathered}$$

Dies läßt sich auch durch eine Matrix ausdrücken. Hierzu definieren wir eine Matrix:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Wir suchen nun eine Matrix zu folgender Gleichung:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Die Elemente von M erhalten wir durch die folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{gathered} ax + by = x^2 - y^2 \Leftrightarrow \\ a = x - y\left(\frac{y+b}{x}\right) \\ \text{Wir wählen} \quad b = -y \\ a = x \end{gathered}$$

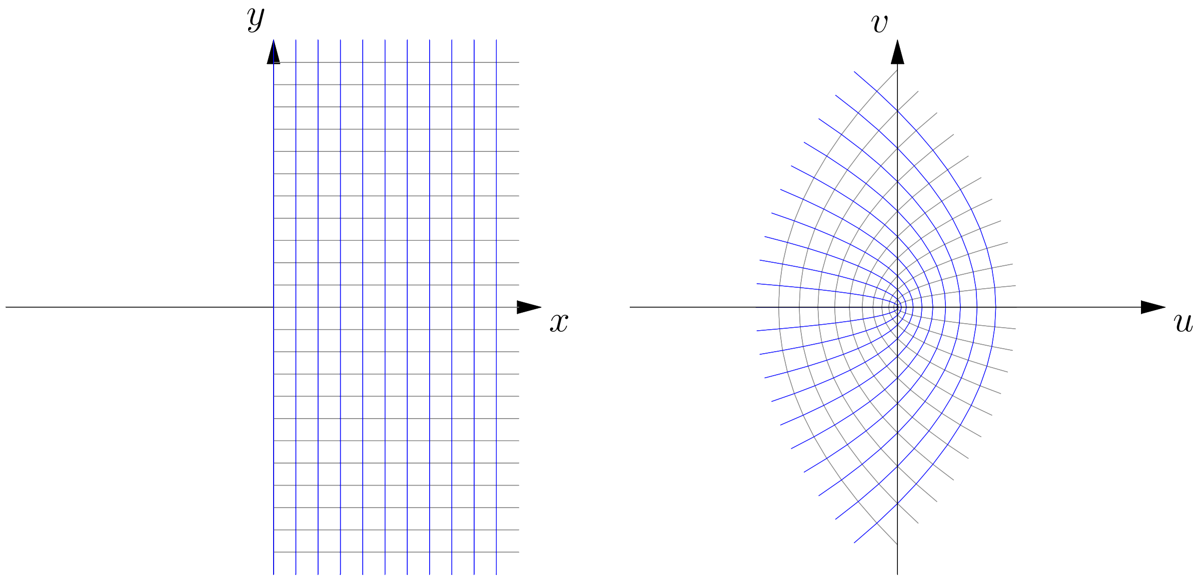
Für die zweite Zeile der Gleichung machen wir dasselbe:

$$\begin{gathered} cx + dy = 2xy \Leftrightarrow \\ c = y\left(2 - \frac{d}{x}\right) \\ \text{Wir wählen} \quad d = x \\ c = y \end{gathered}$$

Wir erhalten die Matrix M zu:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Wie man sieht, ist die Abbildung zerlegbar in zwei Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$.



z-Ebene w-Ebene

Die rechte Halbebene aus dem Definitionsbereich z füllt den gesamten Bereich in w aus. Betrachtet man die Funktion in Kugelkoordinaten so erhält man:

$$r_z^2\left(cos\left(2\varphi_z\right)+jsin\left(2\varphi_z\right)\right)$$

Nun wird klar, dass das Argument von z verdoppelt wird, womit tatsächlich die rechte Halbebene genügt, um den Bereich von w zu füllen. Um diese Funktion eindeutig invertierbar zu machen, darf der Definitionsbereich die Gerade für $x=0$ nicht enthalten (im Gegensatz zur Abbildung). Die w Ebene ist somit an der halbierten Geraden $v=0\wedge u<0$ geschlitzt.

Wir leiten nun die Funktion $f(z)=z^2$ ab. Zuerst wird geprüft, ob die Ableitung existiert, also die Cautchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Dann wird die Ableitung gebildet. Wir erhalten:

$$\begin{gathered}
w=u(x,y)+jv(x,y)=x^2-y^2+j(2xy)\\
u_x(x,y)=2x \quad v_y(x,y)=2y\\
u_y(x,y)=-2y \quad v_y(x,y)=2x
\end{gathered}$$

Wie wir sehen, existiert die totale Ableitung der Funktion. Sie ist:

$$f'(z)=2z=2x+j2y$$

Definition: Holomorphie
Eine komplexe Funktion ist holomorph, analytisch oder regulär wenn sie in jedem Punkt des Definitionsbereiches komplex differenzierbar ist.

Anhang A II

Beweise 2

2.1 Satz des Pythagoras

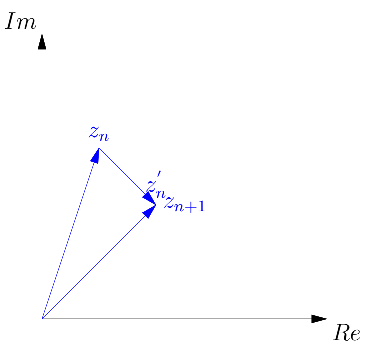
2.2 Spiegelung am Einheitskreis

2.3 Wurzelfolgen

Gegeben ist die rekursiv definierte Folge:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right) \\ \text{mit} \qquad z &\in \mathbb{C} - \{0\} \\ z_n &= x_n + jy_n \end{aligned}$$

Es fragt sich nun, ob diese Folge konvergiert, und wenn ja gegen welche Zahl.



Hierfür suchen wir nach einem Punkt für welchen $z_{n+1} = z_n$ gilt und somit:

$$\begin{aligned} z_n^{'} = z_{n+1} - z_n &\stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \\ z_n^{'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_n} - z_n\right) &\stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \\ 1 = z_n^2 &\Leftrightarrow \\ z_n = e^{\frac{ln(1)}{2}} \end{aligned}$$

Wir finden $[1, -1]$ womit sie Kandidaten für Konvergenzpunkte sind.

Nun fragt sich, für welche Anfangswerte z_0 einer dieser beiden Punkte erreicht wird, und unter welcher Anfangsbedingung jeweils -1 oder 1 erreicht wird.

Deswegen betrachten wir Zunächst das Argument der Folge in dem wir den Realtiel und den Imaginären Teil als getrennte Funktionen schreiben.

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{z_n}\right) \Leftrightarrow$$

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n(x_n^2+y_n^2) + jy_n(x_n^2+y_n^2) + x_n - jy_n}{x_n^2+y_n^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{x_n(x_n^2+y_n^2)+x_n}{x_n^2+y_n^2} \\ \frac{y_n(x_n^2+y_n^2)-y_n}{x_n^2+y_n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Re\{z_{n+1}\} \\ Im\{z_{n+1}\} \end{bmatrix}$$

Nach dem der Term in den Realteil und den Imaginärteil zerlegt ist, kann das Argument berechnet werden:

$$Arg(z_{n+1}) = atan2\left(\frac{Im(z_{n+1})}{Re(z_{n+1})}\right) \Leftrightarrow$$

$$Arg(z_{n+1}) = atan2\left(\frac{y_n(x_n^2+y_n^2) - y_n}{x_n(x_n^2+y_n^2) + x_n}\right) \Leftrightarrow$$

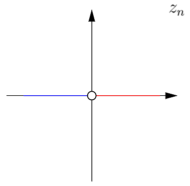
$$Arg(z_{n+1}) = atan2\left(\frac{y_n}{x_n}\left(\frac{(x_n^2+y_n^2) - 1}{(x_n^2+y_n^2) + 1}\right)\right)$$

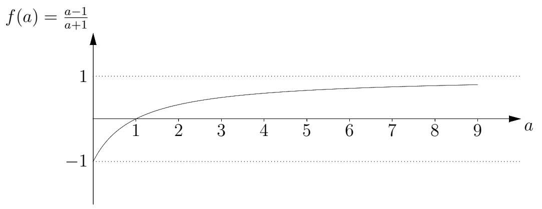
Wenn also:

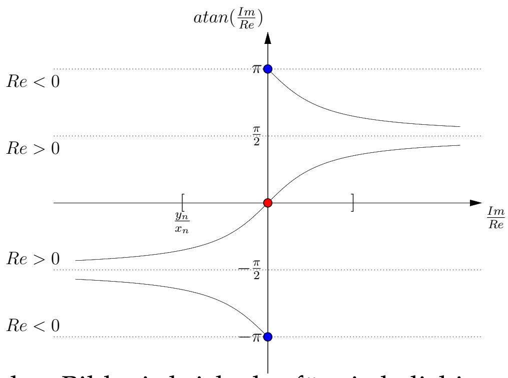
$$Arg(z_n) = atan2\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$$

das Argument bei n ist, so erhalten wir das Argument an der Stelle $n+1$ durch:

$$Arg(z_{n+1}) = atan2\left(\frac{y_n}{x_n}\left(\frac{(x_n^2+y_n^2) - 1}{(x_n^2+y_n^2) + 1}\right)\right)$$







Es wird nun $(x_n^2 + y_n^2)$ mit $a \in \mathrm{R} \wedge a > 0$ substituiert.

$$f(a) = \frac{a-1}{a+1}$$

Für die kleinste Zahl von $f(a)$ erhalten wir $\lim_{a\to 0} f(a) = -1$. Natürlich gilt $f(a) < 1$ auch für große a, da der Zähler immer kleiner ist als der Nenner. Und somit gilt $|f(a)| < 1$. Der Term

$$\frac{y_n}{x_n}\left(\frac{(x_n^2+y_n^2) - 1}{(x_n^2+y_n^2) + 1}\right)$$

wird für wachsendes n betragsmäßig kleiner, insbesondere auch bei einem Vorzeichenwechsel $a < 1$. Sehr negativ fällt auf, dass der Vorzeichenwechsel im Nenner für $x_n^2 + y_n^2 < 1$ nur dem Nenner, also y_n zugerechnet werden darf. Ansonsten erhält man falsche Ergebnisse. Das ist eine unschönheit der Mathematik da der Arkustangens nur als komplexe Funktion einen Sinn macht, und nicht als reelle Veränderliche.

Im linken Bild wird sich also für ein beliebiges $\frac{y_n}{x_n}$ im folgenden Schritt ein $|\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}| < |\frac{y_n}{x_n}|$ einstellen, und somit im Inneren des eingezeichneten Beispielbereiches liegen. Je nach dem ob $x_n > 0$ oder ob $x_n < 0$ ist, konvergiert das Argument der Folge somit gegen 0 oder $|\pi|$. Man beachte das $\pm\pi$ in der z_n Ebene zusammenfallen. Für den Fall $x_n^2 + y_n^2 = 1$ konvergiert das Argument vollständig im nächsten Schritt.

Ist der Realteil $Re = 0$ so bleibt die Phase gleich. Die Null haben wir aus dem Definitionsbereich herausgenommen, da eine Division durch null nicht definiert worden ist. Der Folgeschritt auf $z_n = j$ oder $z_n = -j$ trifft genau die Null und führt somit zu einem nicht definierten Ergebnis. Betrachtet man den Betrag, so sieht man dass dieser zu $x_n^2 + y_n^2 = 1$ konvergiert und somit erhalten wir die beiden Konvergenzpunkt ± 1.
Wählt man für die 1 eine beliebige Zahl A so erhalten wir als Konvergenzpunkte mit gleicher Vorgehensweise:

$$\begin{aligned} z_n^{'} &= z_{n+1} - z_n \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \\ z_n^{'} &= \frac{1}{2}\left(\frac{A}{z_n} - z_n\right) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \\ A &= z_n^2 \Leftrightarrow \\ z_n &= e^{\frac{ln(A)}{2}} \end{aligned}$$

so zeigt sich, dass die Konvergenzpunkte $\sqrt{A}$ sind.